

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО

Вступительные задания

2008 год

Математика

1. При каких (a, b) система уравнений не имеет решений:

$$ax + by = a$$

$$bx + ay = b$$

2. Натуральные числа выписывают подряд и из них последовательно составляют группы $(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9) \dots$ так, что каждая оканчивается квадратом номера группы. Найдите сумму членов k -ой группы.
3. Мне вдвое больше лет, чем было вам тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Вместе нам 70 лет. Сколько лет каждому из нас?
4. В окружность радиуса $2\sqrt{7}$ вписана трапеция $ABCD$, причем ее основание AD является диаметром, а угол BAD равен 60° . Хорда CE пересекает диаметр AD в точке P такой, что $AP : PD = 1 : 3$. Найдите площадь треугольника BPE .
5. Сравните два числа: $\sqrt{23} - \sqrt{11}$ и $\sqrt{22} - \sqrt{10}$.
6. Можно ли расставить по кругу 7 целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трех расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трех подряд расположенных — 2, \dots , каких-то трех подряд расположенных — 7?
7. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в разных направлениях (один по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи не смогут собраться на одном дереве.
8. На плоскости дано бесконечное множество прямоугольников, вершины каждого из которых расположены в точках с координатами

$$(0, 0), (0, m), (n, 0), (n, m)$$

где n и m — целые положительные числа (свои для каждого прямоугольника). Докажите, что из этих прямоугольников можно выбрать два так, чтобы один содержался в другом.

Физика

1. Почему на улице легче простудиться в прохладную туманную погоду, чем при такой же температуре воздуха, но когда тумана нет?
2. Известно, что большинство материалов в расплавленном состоянии менее плотны, чем их твердые фазы (например, алюминий или железо тонут в своем расплаве). Почему такого не происходит с водой? Предложите варианты. Что будет происходить со льдом, если его сильно сжимать? Будет ли такое происходить с алюминием или железом? Объясните, к чему могла бы привести ситуация, когда лед был бы тяжелее воды.
3. Среди моряков ходят байки о том, что многие тонущие корабли не достигают дна, а висят на некоторой глубине из-за того, что сильно сжатая на большой глубине вода становится плотнее, чем сам корабль. Оцените глубину, на которой корабль из железа (считать несжимаемым), затонувший в море (плотность воды считать зависящей от давления линейно), перестанет «тонуть» и повиснет. Правы ли моряки?

Данные: плотность ρ (Fe) = 8000 (кг/м³),
плотность ρ (H₂O) при давлении 1 атм = 1000 (кг/м³),
сжимаемость k (H₂O) = 1/20000 (1/атм), то есть при каждом повышении давления на 20000 атмосфер вода становится в 2 раза плотнее.

4. Сосуд с водой имеет форму трехгранной призмы, нижнее ребро и верхняя грань которой горизонтальны. В начальный момент времени температура воды линейно зависит от высоты. В самой нижней точке температура воды $t_1 = 4$ градуса по Цельсию, а на поверхности она достигает $t_2 = 13$ градусов по Цельсию. С течением времени температура воды выровнялась во всем сосуде. Найдите значение t_0 установившейся температуры. Считается, что стенки и крышка сосуда не проводят и не поглощают тепло.
5. Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом $r = 380000$ км. Определите скорость движения Луны и период её обращения вокруг Земли. Считать известным: радиус Земли $R = 6400$ км и ускорение свободного падения на её поверхности $g = 9,8$ м/с².

Химия

1. При разборке шкафа с реактивами юный химик обнаружил склянки со следующими веществами: синильная кислота, фосген, персульфат аммония, веселящий газ, каломель, киноварь, железный купорос, угарный газ, сероуглерод. Помогите юному химику разобраться и понять, что за вещества скрываются за этими таинственными названиями.
2. Имеет ли запах оксид азота NO? Если да, то как его определить? Ответ поясните.
3. В трех пробирках содержатся водные растворы K_2CO_3 , $AlCl_3$, $NaCl$. Как определить, где что находится, не сливая пробирок?
4. Вещество массой 14,9 г, образованное двумя видами химических частиц с одинаковым электронным строением $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$, полностью прореагировало с 20,0 г 98%-ной серной кислоты. Напишите уравнение реакции и определите массу образовавшейся соли.
5. Какие два вещества вступили в реакцию и при каких условиях, если в результате образовались следующие вещества (указаны все продукты без коэффициентов):
 - 1) $NaH_2PO_4 + H_2O$;
 - 2) $BaHPO_4 + NH_3 + H_2O$;
 - 3) $CaCO_3 + Na_2CO_3$.Запишите полные уравнения реакций.
6. При сжигании смеси паров бесцветной ядовитой жидкости А с двукратным по объему количеством кислорода получили 36 мг воды, 89,6 мл углекислого газа, 44,8 мл азота и 67,2 мл кислорода. Определите количественный состав смеси до начала реакции. Почему при добавлении солей железа к калиевой соли А происходит значительное снижение ее токсичности?

Биология

1. В чем преимущества и недостатки пищевой специализации у животных?
2. Как вы думаете, почему одни растения можно высаживать в почву семенами, а другие лучше через рассаду? Чем это может объясняться? Приведите примеры тех и других растений.
3. Почему в жару частота дыхания собаки повышается, а у человека этого не происходит?
4. Каким образом человек приспособился к прямохождению? В чем основные отличия анатомии опорно-двигательного аппарата человека от аналогичных структур других млекопитающих?
5. Пункция спинного мозга — метод, позволяющий взять пробу спинномозговой жидкости для анализа (обнаружение возбудителей определенных болезней, определение содержания белков). Врач прокалывает иглой кожу и оболочку спинного мозга, вводя иглу в промежуток между позвонками. Обычно пункцию спинного мозга делают в поясничном отделе позвоночника. Но иногда эту манипуляцию проводят в другом отделе позвоночника. Почему в простейшем случае пункцию делают в поясничном отделе? Где еще можно сделать пункцию спинного мозга? Опишите ситуации, в которых пункцию делать вообще нельзя. Чем опасно неграмотное проведение этой манипуляции?
6. Как устроен слуховой анализатор человека? Чем слуховые косточки отличаются от других костей?
При нарушении функции слуховых косточек наступает нарушение слуха («тугоухость»). При этом человек по-прежнему может слышать звуки, хотя и гораздо хуже. Как в таком случае звук передается во внутреннее ухо?