

Летняя многопрофильная школа при МЦНМО

Вступительные задания

2008 год

Математика

1. Найти геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют соотношению: $\sin(x + y) = 0$.
2. Треть школьников осталась в лагере, а остальные ребята ушли в поход. Оставшиеся в лагере съели за обедом четверть приготовленной похлебки, а вернувшиеся вечером из похода получили порции в полтора раза большие, чем давали за обедом. Сколько похлебки осталось для пса Троцкого?
3. Про квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 - ax + 1$ известно, что $|f(x)| < 1$ при $0 < x < 1$. Найдите наибольшее возможное значение a .
4. Построить график функции $f(x) = |\arcsin(\sin(x))|$.
5. У треугольной пирамиды основание равносторонний треугольник со стороной 8, а боковое ребро равно 5. Найти радиус вписанной сферы.
6. По кругу записаны 7 натуральных чисел. Известно, что в каждой паре соседних чисел одно делится на другое. Докажите, что найдётся пара и не соседних чисел с таким же свойством.
7. Можно ли на плоскости расположить бесконечное множество одинаковых кругов так, чтобы любая прямая пересекала не более двух кругов?
8. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab + a + b$. Какое число останется после $n - 1$ таких операций?

Физика

1. Школьник Вася Знайкин налил себе горячий чай, но понял, что опаздывает в школу. Поскольку чай имеет большую температуру, чтобы не ждать пока напиток остынет, он решил долить чашку до верха холодной водой. Как ему будет лучше поступить: подождать некоторое время, потом залить в кружку воды и сразу выпить, или сразу залить холодную воду и потом, подождав, выпить? Обоснуйте ответ. Какие процессы ему будут помогать, а какие мешать? В каком случае эффект от такого выбора будет сильнее, а в каком слабее?
2. Немецкий физик Вильгельм Феддерсен в 1857 году построил прибор для изучения электрических разрядов (искр) в воздухе. В одном из опытов Феддерсена, например, оказалось, что время свечения искры составляло 0,000025 секунд, и эта искра состояла из нескольких последовательных вспышек, продолжительностью около 0,000005 секунд. Как Феддерсену удалось измерить такие короткие промежутки времени (никаких точных часов в середине XIX века не было)? Предложите любой способ определения продолжительности свечения искры, использующий технику, доступную, по-вашему мнению, экспериментаторам того времени.
3. Неподвижная молекула распадается на два атома. Масса одного из атомов в три раза больше, чем другого. Определите кинетическую энергию каждого атома, если их общая энергия равна $E = 0,032$ пДж.
4. Одним из «пределов мечтаний» современной науки является постройка так называемого «космического лифта»: длинного сооружения высотой в несколько сотен километров, которое позволило бы выводить на орбиту вокруг земли грузы без использования дорогих космических ракет. Найдите высоту этого сооружения над уровнем земли, которое позволило бы поднимаемому на эту высоту грузу выйти на околоземную орбиту.

Данные: гравитационная постоянная $g = 6,7 \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \times \text{с}^2$;

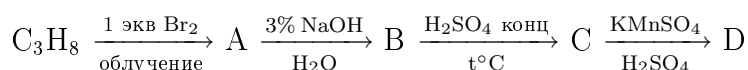
масса Земли: $M = 6 \times 10^{24} \text{ кг}$;

радиус Земли: $R = 6,4 \times 10^6 \text{ м}$.

5. В пространстве, где одновременно созданы вертикальные и горизонтальные электрические поля $E_v = 300 \text{ В/м}$ и $E_h = 400 \text{ В/м}$, вдоль линии напряжённости результирующей этих двух полей летит электрон. При прохождении пути $S=2,7 \text{ мм}$ его скорость изменилась в два раза. Определить конечную скорость электрона.

Химия

1. Напишите как можно больше изомеров, имеющих общую формулу C_4H_8O , и назовите их в соответствии с правилами номенклатуры IUPAC.
2. Одним из методов получения диэтилового эфира является реакция дегидратации этанола под действием концентрированной серной кислоты. В результате этой реакции также может образовываться побочный продукт. Что же это за продукт? Какими свойствами он обладает? Приведите примеры характерных реакций с ним.
3. Напишите уравнения реакции, укажите условия:



4. Расположите вещества в порядке увеличения кислотности:



5. Юный участник химической олимпиады заполнял таблицу «Применение химических веществ». По мнению жюри, он допустил много ошибок. Исправьте их.

	Вещество	Применение	
1	H_2O	наполнитель электроламп	А
2	ZnO	припой	Б
3	I_2	широко используемый растворитель	В
4	$ClCN$	применяется в пекарском деле	Г
5	Pb/Sn (сплав)	строительный материал	Д
6	Kr	антисептик	Е
7	Na_2O_2	боевое отравляющее вещество	Ж
8	CO_2	действующее вещество в изолирующих противогазах	З
9	$CaSO_4 \cdot 1/2 H_2O$	компонент детской присыпки	И
10	$NaHCO_3$	хладоагент	К

6. Бесцветная соль А состоит из трех элементов X, Y, Z, два из которых радиоактивны. Состав А: X 19,3%; Y 49,0%; Z 31,7%. X широко распространен в земной коре и живых организмах, а его соли используются в качестве удобрений. Y практически отсутствует в земной коре. Получают его при переработке продуктов деления урана в атомных реакторах. Z оказался наиболее распространенным элементов в доставленных на Землю образцах лунного грунта. В качестве простого вещества он весьма активен; в чистом виде был получен лишь в конце XVIII века. Приведите формулу вещества А.

Биология

1. Известно, что некоторые зрелые клетки способны существовать и выполнять свои функции без нескольких органелл. Приведите примеры таких клеток. Без какого максимального количества органелл может быть клетка?
2. Современные поливитаминные препараты обязательно включают в себя ряд микроэлементов. Для чего это необходимо? Какие примеры вы можете привести? Какова роль витаминов и микроэлементов?
3. Известно, что при недостаточном или избыточном освещении хлоропласты внутри растительных клеток способны перемещаться. По какой причине и для чего это происходит? Каковы механизмы таких перемещений?
4. В секретной лаборатории ведется работа по выведению мифических животных: дракона, пегаса, кентавра, феникса, единорога, грифона, василиска, медузы горгоны. Как называются такие животные? Какие проблемы возникнут при их выведении и размножении? Смогут ли такие животные существовать где-либо в дикой природе, или им необходимы особые условия (если да, то какие)?
5. Почему при приеме антибиотиков рекомендуют принимать еще и противогрибковые препараты? Дайте развернутый ответ.