«Элементы теории чисел»

Цель этого курса – дать начальное представление о теории чисел, разделе математики, изучающем целые числа и различные взаимоотношения между ними. Будут рассмотрены такие базовые, ключевые моменты как делимость чисел, алгоритм Евклида, простые числа, модулярная арифметика, диофантовы уравнения и китайская теорема об остатках.

Задачи – пожалуй, основная составляющая курса. Будут рассмотрены основные типы задач и методы, приемы их решения.

Курс рассчитан на школьников окончивших 8-10 классы.

Конспект курса по дням:

1 день

НОД. Алгоритм Евклида, его корректность. Расширенный НОД.
Основная теорема арифметики.

Существование однозначного разложения произвольного целого числа на простые.

Задачи:

1) задачи на поиск НОДа и расширенного НОДа различных пар чисел
2) разложить несколько чисел на простые
3) доказать несколько свойств НОДа (трив. Пример: $m(a, b) = (ma, mb)$)
4) доказать, что уравнение $aX + bY = c$ разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда $(a, b) \mid c$.

2 день

Бесконечность множества простых чисел.
Решето Эратосфена.

Задачи:

1) доказать бесконечность простых чисел вида $4n+3$, $4n+1$, $6n+5$
2) проверить несколько чисел на простоту
3) доказать что для каждого K существует бесконечно много последовательностей натуральных чисел $M, \ldots, M + K - 1$ не содержащих простых чисел
4) доказать, что среди чисел задаваемых конкретным многочленом – бесконечное количество составных ($12x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 14$)
5) доказать, что среди чисел задаваемых произвольным многочленом – бесконечное количество составных

3 день

Сравнения по модулю. Сравнимость по модулю, как отношение эквивалентности . Классы сравнимых по модулю чисел. Связь сравнимости по модулю с арифметическими операциями. Полная система вычетов. Приведенная система вычетов.
Теорема Ферма.

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Теорема Эйлера.

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, если $(a, m) = 1$

Задачи:

1) вывести признаки делимости на 3, 9, 11, 101, 37, 7, 11, 13.
2) доказать, что $(h_1 + \ldots + h_n)^p \equiv h_1^p + \ldots + h_n^p \pmod p$.
3) найти остатки от деления разных чисел в разных степенях на разные числа (например остаток от деления 2009^{2010} на 13)
4) доказать, что есть бесконечно много натуральных чисел, не являющихся суммой трех

квадратов.

5) может ли сумма цифр точного квадрата равняться 2003?

6) $x+y \vdots 7 \Rightarrow x^7 + y^7 \vdots 49$

4 день

Диофантовы уравнения. Критерий разрешимости в целых числах. Общее решение.

Задачи:

1) Решить разные диофантовы уравнения.
   Пример: $2x + 5y = 14$, решить в целых числах
2) Поиск решения диофантовых уравнений при различных ограничениях.
   Найти все целые положительные решения уравнения $3x - 7y = 5$
3) Всякие задачи вроде – можно ли взвесить такой-то вес имея такие-то гири.
   Пример: Можно ли отвесить 28г некоторого вещества на чашечных весах, имея только 4 гири по 3г и 7 гирь по 5г

5 день

Китайская теорема об остатках. Summary курса, ликвидация проблемных моментов, разбор вопросов.

Задачи: Решение разных систем сравнений и по ходу проверка систем на соответствие условиям теоремы.

Пример:

$x \equiv 2 \pmod 5$,

$x \equiv 5 \pmod 7$,

$x \equiv 3 \pmod{11}$