Наглядная топология

Гумин Максим, 2010

Добавить:

1) Задача Арнольда на конфигурационное пространство.

2) Гипотеза Пуанкаре.

3) Смежностные триангуляции.

4) Подготовить набор символов для распознавания гомеоморфности и гомотопической эквивалентности.

5) Вложимость графов в разные поверхности.

6) Конфигурационные пространства: задача про волка, козу и капусту.

7) Операции над пространствами не мотивированны (оставить только прямое произведение).

8) Придумать нормальную схему рассказа про $\mathbb{R}P^2$.

9) Задача про четырех коней.

10) Доказать, что в $\mathbb{R}^4$ все узлы распутываются.

11) Сжимающие отображения и их использование в дифференциальных уравнениях.

12) Вставить задачи из соответствующего экзамена.

Предисловие

Топология изучает свойства фигур и пространств, инвариантные относительно непрерывных деформаций. За последнее столетие она превратилась из небольшой коллекции примеров в развитую науку, имеющую приложения ко многим разделам математики и физики. Цель курса — познакомить школьников именно с базовыми и наглядными примерами топологии (двумерные поверхности, векторные поля, деформации эластичных тел), дать интуитивное представление об основных топологических понятиях (топологическое пространство, непрерывное отображение, гомеоморфизмы, многообразия) и показать, как топологические соображения (замкнутость, теорема о промежуточном значении, конфигурационное пространство) могут работать в несвязанных, на первый взгляд, с топологией задачах.

Некоторые примеры и мотивация

- Астронавт совершил космическое путешествие и вернулся на Землю отраженным.

- Четырехмерная собака может залезть в закрытый ящик.

- Как вселенная может быть конечной, но без края. Не исключено, что два астрономических объекта, видимых на небе в разных местах, есть одни и тот же объект, видимый с разных сторон. WMAP. Сейчас уже точно известно, что такое бывает (вращающиеся черные дыры).

- Сфера и тор не гомеоморфны, т.к. на торе есть нестягиваемые кривые, а на сфере — нет.
- Фазовые пространства. Движения планет как течение несжимаемой жидкости.

Теорема о промежуточном значении

Метод деления отрезка пополам дает доказательство теоремы о промежуточном значении.

1. Доказать, что кубическое уравнение имеет по крайней мере один действительный корень, а кубическое уравнение с отрицательным свободным членом — один положительный корень.

2. Через $f(a)$ обозначим наибольший из корней уравнения $x^3 - 3x + a = 0$. Является ли функция f непрерывной?

3. Пусть на плоскости заданы две фигуры (измеримые множества). Доказать, что существует прямая, делящая каждую из этих фигур на две равновеликие части.

4. На плоскости выбрали множество точек с корректно определённой площадью. Покажите, что существует пара перпендикулярных прямых, делящая выбранное множество на четыре равновеликие части.

5. Пусть поезд движется из пункта A в пункт B с некоторой известной скоростью (не обязательно постоянной, не обязательно скорость нулевая в конечных пунктах). В одном из вагонов этого поезда установлен массивный стержень, который может свободно колебаться вперед–назад под действием силы инерции. Возможно ли в момент отхода поезда поместить стержень в такое начальное положение, т.е. дать ему такой угол наклона, чтобы на протяжении всего пути он не прикоснулся к полу, будучи предоставлен воздействию движения поезда и силе собственной тяжести?

6. Доказать, что на поверхности Земли в данный момент времени найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых совпадают температура и давление. Температура и давление непрерывно зависят от точки на земном шаре.

7. Доказать, что вокруг любой гладкой замкнутой кривой можно описать квадрат.

- **8.** Доказать, что если диаметр плоской фигуры не превосходит d, то ее можно покрыть правильным шестиугольником с расстоянием d между противоположными сторонами.

Примеры пространств

Точка, прямая, интервал, луч, полуинтервал, отрезок, окружность, диск... Компоненты связности.

Как можно представлять себе трехмерную сферу (добавлением точки к $\mathbb{R}^3$ или склейкой двух шаров).

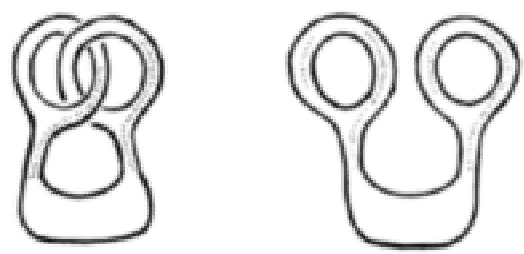
Деформировать по листу Мебиуса не улитку, а человечка с сердцем!

Дизъюнктное объединение и прямое произведение пространств.

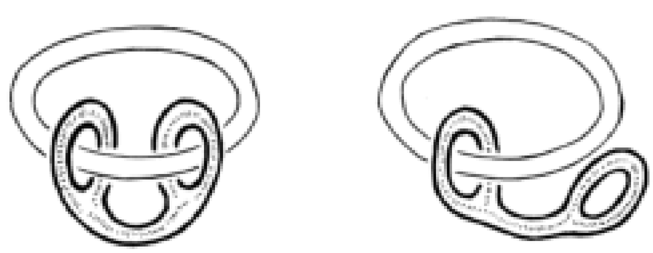
9. Какой известной поверхности гомеоморфно пространство $S^1 \times S^1$?

Деформации эластичных тел

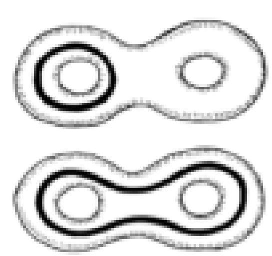
10. Задача про топологического человека. Если бы человек был достаточно эластичен, то мог бы разъединить сцепленные пальцы обеих рук, не расцепляя пальцы?



11. Эластичный крендель надет двумя ручками на бублик. Доказать, что, деформируя крендель, одну его ручку можно снять с бублика.



12. На кренделе вокруг обоих ручек нарисована окружность. Доказать, что, деформируя окружность, ее можно перевести в состояние обернутости вокруг одной ручки.



13. Продеформировать четвертую фигуру в крендель.

Гомотопии

14. Показать, что лист Мебиуса гомотопически эквивалентен окружности.

15. Показать, что тор с выколотой точкой гомотопически эквивалентен букету двух окружностей.

16. Обобщение: показать, что двумерная сфера с g ручками без одной точки гомотопически эквивалентна букету g окружностей. Показать, что сфера с g ручками без двух точек гомотопически эквивалентна букету N окружностей и найти N.

17. Показать, что стандартное погружение бутылки Клейна в $\mathbb{R}^3$ гомотопически эквивалентно $S^1 \vee S^1 \vee S^2$.

18. Показать, что сфера с n отождествленными точками гомотопически эквивалентна букету из $n-1$ окружностей и одной сферы.

19. Показать, что тор с n раз заклеенной полостью гомотопически эквивалентен букету из n сфер и одной окружности.

Склейки из квадрата

Стругацкие: Град Обреченный. Отождествление точек на границе квадрата и построение соответствующих факторпространств. Склеивание одной пары сторон: цилиндр и лист Мебиуса. Склеивание двух пар сторон: тор, бутылка Клейна и проективная плоскость. Склейка бутылки Клейна из двух листов Мебиуса. Ориентация. Неориентируемость листа Мебиуса и бутылки Клейна. Теорема о классификации двумерных поверхностей.

Проективная плоскость

Окружность с отождествленными противоположными точками. Двумерная сфера с отождествленными противоположными точками. Лист Мебиуса в проективной плоскости. Построение проективной плоскости путем приклеивания листа Мебиуса к кругу. Неориентируемость проективной плоскости. Невложимость в трехмерное пространство.

Многообразия

Понятие многообразия. Край. Край произведения. Край листа Мебиуса. Сфера, тор и крендель. Постановка вопроса о эквивалентности простейших многообразий. Заблуждения о плоскости Земли. Ориентируемость.

20. Классификация двумерных многообразий — вполне реально.

21. Что получится при склейке из $4n$-угольника и подобные задачи.

22. Какое пространство получится, если склеить два ребра у треугольника?

23. Каким наименьшим количеством карт можно покрыть окружность так, чтобы пересечение любых двух было связно?

24. Каким наименьшим количеством карт можно покрыть двумерный тор?

25. Доказать, что $\partial(\mu \times I)$ гомеоморфно бутылке Клейна.

26. Доказать, что тор не гомеоморфен кренделю.

27. Доказать, формулы: $\partial(X \sqcup Y) = \partial X \sqcup \partial Y$, $(A \times X) \sqcup (B \times X) = (A \sqcup B) \times X$. Доказать аналогичные формулы для связной суммы.

28. Доказать, что если на замкнутом многообразии M^n существует инволюция без неподвижных точек, то M^n является границей (т.е. существует такое многообразие W^{n+1}, что $\partial W^{n+1} = M^n$).

29. Существуют ли компактные многообразия, не вложимые в $\mathbb{R}^n$ ни при каком n? Тот же вопрос для произвольных (не обязательно компактных) многообразий.

30. Теоремы Уитни о вложениях и погружениях.

Конфигурационные пространства

Представление окружности, сферы, тора и проективной плоскости в виде конфигурационного пространства шарнирных механизмов. Шарнирный механизм типа (1,1,1;1). Конфигурационное пространство электрона.

31. Придумать нетривиальную механическию систему с данным конфигурационным пространством: μ, S^n, T^n, M_g, $S^1 \vee S^1$.

32. Доказать, что пространство всех прямых на плоскости гомеоморфно $\mathbb{R}P^3 \setminus \{*\}$.

33. Доказать, что $\mathbb{R}P^3$ — конфигурационное пространство твердого тела.

Эйлерова характеристика

Правильные многогранники. Формула Эйлера для выпуклых многогранников и ее индуктивное доказательство. Эйлерова характеристика для сферы и тора. Триангуляции.

34. Доказать, что в плоском графе $2E \geqslant 3F$.

35. Доказать, что в любом плоском графе найдется хотя бы одна вершина степени 5 или меньше.

36. Смежностные триангуляции.

37. Доказать, что для любого простого трехмерного многогранника

$$\frac{f_0}{4} - \frac{f_1}{3} + \frac{f_2}{2} - \frac{f_3}{1} = 0$$

Правильные многогранники

38. Исследовать правильные сети на разных поверхностях.

Узлы

Инварианты — основная идея алгебраической топологии. Трилистник. Зацепление Борромео. Количество правильных раскрасок в 3 цвета — инвариант узла.

Дополнительные задачи

39. Вводя количество разбивающих точек как топологический инвариант, доказать, что буквы О, Г, Т, Ь попарно не гомеоморфны между собой.

40. Вводя индекс точки фигуры, составленной из конечного числа дуг, как топологический инвариант, доказать, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны.

41. Классифицировать с точностью до гомеоморфизма и гомотопической эквивалентности все буквы русского алфавита.

42. Сформулировать критерий того, что фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

43. Доказать, что графы K_5 и $K_{3,3}$ невложимы в плоскость

44. Всякая ли окружность в трехмерном торе ограничивает диск? Всякая ли двумерная сфера ограничивает трехмерный шар? Те же вопросы для $S^1 \times S^2$ и для S^3.

45. Доказать гомеоморфизмы:
1) $\mathrm{Sym}^2(S^1) = \mu^2$;
2) $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$;
3) $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}\mathrm{P}^1) = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$;
4) $\mathrm{Sym}^3(S^1) = D^2 \times S^1$.

46. Доказать, что пространство (с естественной топологией) не более чем трехэлементных подмножеств окружности гомеоморфно S^3. Как это связано с предыдущей задачей?

• **47.** Доказать, что снежинка Коха гомеоморфна окружности.

48. Секундная и минутная стрелки — узел на торе. Придумать связанную с этим задачу.

49. Поверхность Хопфа: $(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})/\mathbb{Z} = S^1 \times S^3$ — пример комплексного многообразия без симплектической структуры.

50. В некоторых клетках квадрата 20? 20 стоит стрелочка в одном из четырёх направлений. На границе квадрата все стрелочки смотрят вдоль границы по часовой стрелке. Кроме того, стрелочки в соседних (возможно, по диагонали) клетках не смотрят в противоположных направлениях. Докажите, что найдётся клетка, в которой стрелочки нет.

Рассказать про «Элегантную вселенную», TQFT и про приложения топологии в физике.

Задачи зачета 2010 года

51. Доказать, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c$, где $c < 0$, имеет хотя бы один положительный корень.

52. Доказать, что вокруг произвольной гладкой кривой можно описать ромб с углом в $60°$.

53. Доказать, что отрезок не гомеоморфен полуинтервалу.

54. Показать, что

1) сфера с n отождествленными точками гомотопически эквивалентна букету из $n-1$ окружностей и одной сферы.

2) тор с n раз заклеенной полостью гомотопически эквивалентен букету из n сфер и одной окружности.

55. Можно ли одним замкнутым разрезом превратить $\mathbb{R}P^2$ в:

1) диск и лист Мебиуса;

2) диск.

56. Привести пример двух комбинаторно неэквивалентных многогранников с одинаковым набром (V, E, F).

57. Доказать, что граф $K_{3,3}$ невозможно вложить в плоскость.

58. Построить вложение графа $K_{3,3}$

1) в тор;

2) в лист Мебиуса.

59. Найти эйлеровы характеристики всех двумерных многообразий. Подсказка: доказать, что

$$\chi(A\#B) = \chi(A) + \chi(B) - 2$$

60. Показать, что из всех двумерных многообразий только на сфере и бутылке Клейна существует бескоечное количество правильных многогранников.

○ **61.** Доказать, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

Список литературы

[1] С. Г. Смирнов. Прогулки по замкнутым поверхностям.

[2] В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология.

[3] В. В. Прасолов. Наглядная топология.

[4] Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика?