Сангаку

Антон Айзенберг

Япония, период Эдо (1603–1868 н.э.). Эпоха расцвета японской культуры. А также эпоха железного занавеса, практически не пропускавшего в страну чужаков. В это время в Японии появились многие оригинальные виды искусства и традиции, ассоциирующиеся у нас с этой удивительной страной. Среди прочих многочисленных традиций в это время в стране восходящего солнца зародилась малоизвестная на западе традиция **сангаку**. Японцы, — математики и простые обыватели, старики-монахи и молодые люди доказывали планиметрические теоремы, красиво оформляли их на деревянных табличках и вешали в святилищах синто и буддийских храмах. Другие люди, проходя мимо, созерцали геометрическую красоту, задумывались и, возможно, доказывали свои обобщения и аналогии. Среди сохранившихся до наших дней табличек можно найти чрезвычайно элегантные и порой далеко нетривиальные геометрические факты, многие из которых не были обнаружены европейскими математиками. Курс посвящен преимущественно японской геометрии — как простой, так и сложной, однако в нем будут присутствовать более известные и общезначимые факты, близкие по духу к японской геометрии. Стоит отметить, впрочем, что (1) Курс практической ценности не представляет, и единственный прок от него — удовольствие от созерцания логической красоты простых объектов. (2) Никакой связной теории мы изучать не будем. Мы будем просто решать задачи, а для некоторых задач нам потребуется решать задачи-леммы. Большинство задач, как и решений между собой никак не связаны. (3) Приветствуется творческий подход к прослушиванию курса, выражающийся в придумывании собственных задач и теорем, а также оформлении их на табличках.

Реквизит: картонные таблички, краски, много цветных маркеров, большая доска.

Уведомление: в этом файле и курсе чертежи и многие доказательства невозбранно сперты с сайта [3]. Сайт англоязычный, но содержит гораздо более обширную коллекцию сангаку-задач и решений. Есть там и не только сангаку и даже ого-го сколько. В-общем, всем, у кого неплохо с английским, крайне советую туда заглянуть.

1 Задачи и теоремы

Задача 1.1. (Вводная, давалась на вступительном тесте в ЛМШ-2012) Рассмотрим правильный семиугольник $A_1A_2\dots A_7$. Доказать, что $\frac{1}{A_1A_4}+\frac{1}{A_1A_3}=\frac{1}{A_1A_2}$.

Замечание: способ 1 — тригонометрия, дешево и сердито. Способ 2 — свести все к подобию треугольников доп. построением.

Замечание 2: тут можно накреативить по аналогии свою теорему про n-угольник.

Начинаем с относительно простых фактов, входящих в олимпиадный геометрический минимум.

Рассказ про отношение ориентированных отрезков. Единственность точки C на прямой AB, для которой $\frac{AC}{CB}=k$. Бесконечно удаленная точка.

Задача 1.2. Теорема Чевы прямая и обратная.

Задача 1.3. Теорема Менелая прямая и обратная.

Задача 1.4. Теорема Монжа. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — окружности, лежащие вне друг друга. Для каждой пары окружностей провели общие внешние секущие к ним и нашли точку их пересечения. Доказать, что три полученные точки лежат на одной прямой.

Указание: теорема Менелая.

Вариант теоремы Монжа, в котором для двух пар окружностей берутся внутренние общие касательные.

Задача 1.5. Теорема Птолемея об описанном четырехугольнике. [2, Зад.6.37]

Доказать задачу 1 с помощью теоремы Птолемея.

Задача 1.6.* Плюккеровы соотношения на ориентированные площади и теорема Птолемея через них.

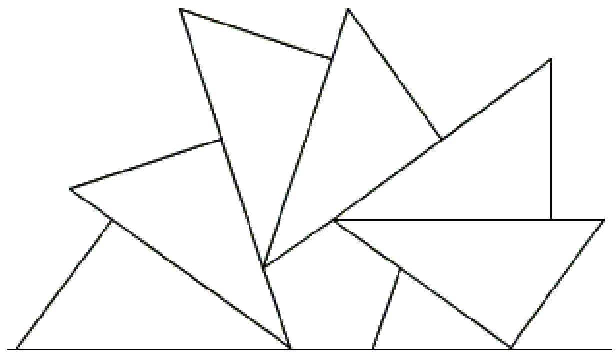

Рис. 1: Сангаку о пятиугольном веере

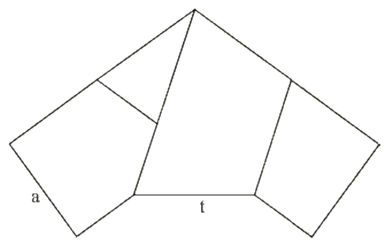

Рис. 2: Сангаку о любовной записке

Задача 1.7. (Вступительный тест в ЛМШ-2013) Поговорить о соотношениях различных элементов в правильном 5-угольнике (можно через подобие или совсем просто через теорему Птолемея). Тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$.

Задача 1.8. Сангаку о пятиугольном веере.

6 равных прямоугольных треугольников расходятся веером вдоль сторон правильного пятиугольника (см. рис 1) со стороной a. Выразить гипотенузу этих треугольников t через a.

Решение: следует из найденных значений тригонометрических функций углов кратных $\frac{\pi}{5}$.

Задача 1.9. Задача о любовной записке. В Японии любовные записки было принято писать на ленте и завязывать в пятиугольный узел (рис. 2).

(1)* Доказать, что получается правильный пятиугольник.

(2) Если известно, что ширина исходной полоски бумаги равна a, найти сторону полученного пятиугольника.

Задача 1.10. Задача "хвост павлина".

Эту несложную и красивую задачу придумала женщина Окуда Цумэ в 1865 году. В круге диаметра $2R$ проведены две касающиеся дуги радиуса R и 10 вписанных кругов: два диаметра R, 4 красных радиуса t и четыре голубых радиуса t' (рис. 3). Доказать, что $t = t' = R/6$.

Решение: ничего кроме теоремы Пифагора (рис. 4).

Задача 1.11. Задача "8 кругов"

По исходной табличке 5 трудно восстановить, о чем была задача, но один из вариантов таков: выразить радиус наименьших кругов через радиус большого.

Решение: только Пифагор (рис. 6).

Задача 1.12. Сангаку подростка.

В синем равностороннем треугольнике нарисованы три зеленных круга радиуса a, четыре красных круга радиуса b и шесть белых кругов радиуса c, как показано на рис.

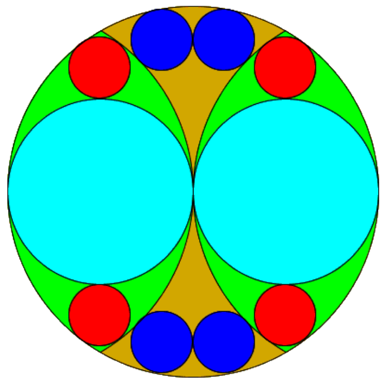

Рис. 3: Сангаку Хвост павлина

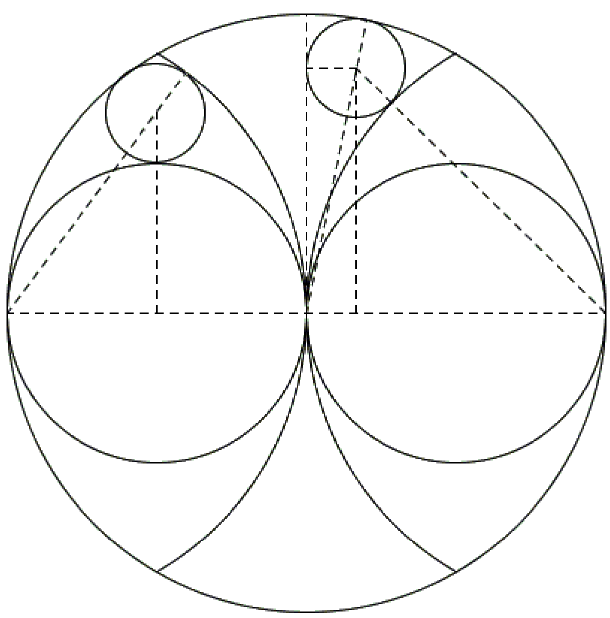

Рис. 4: Сангаку Хвост павлина, решение

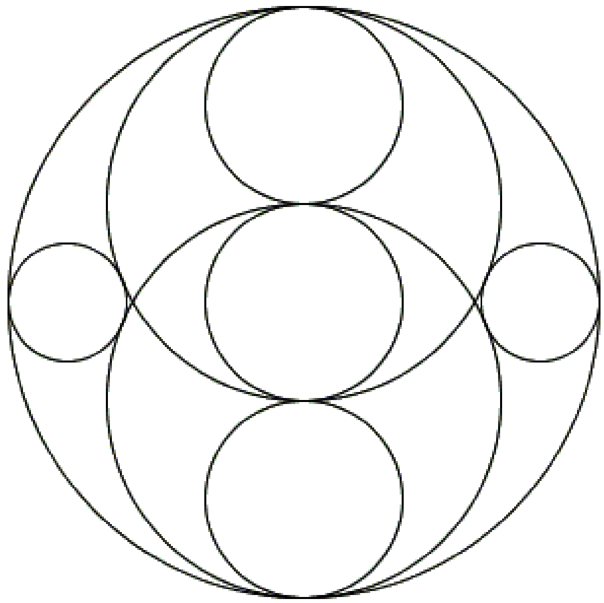

Рис. 5: Сангаку 8 кругов

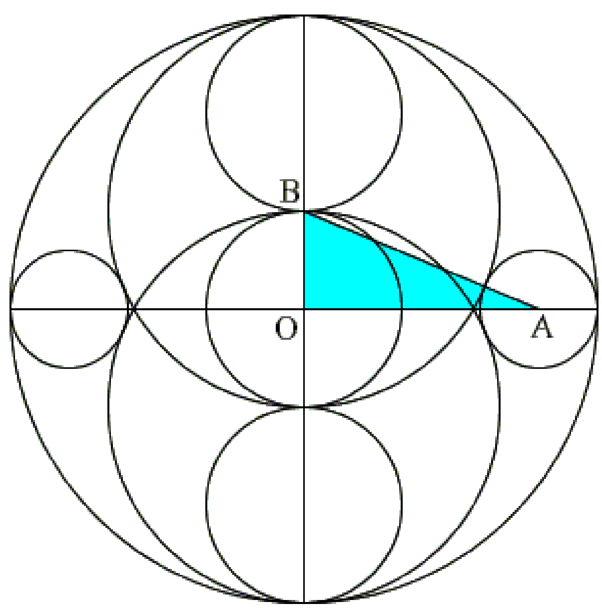

Рис. 6: Сангаку 8 кругов, решение

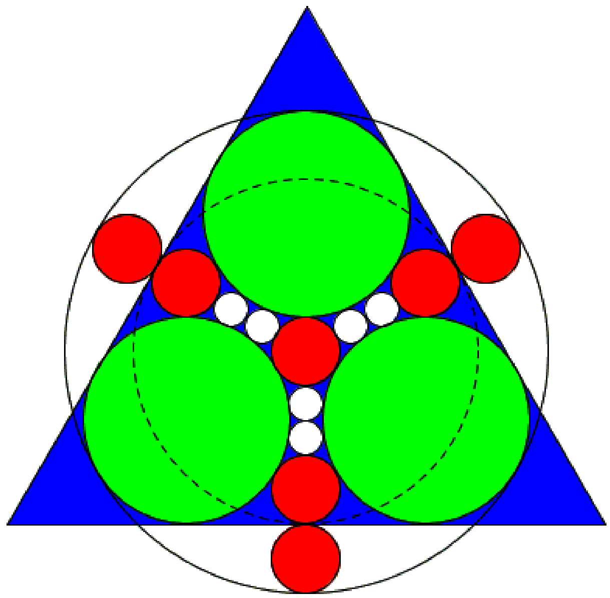

Рис. 7: Сангаку подростка

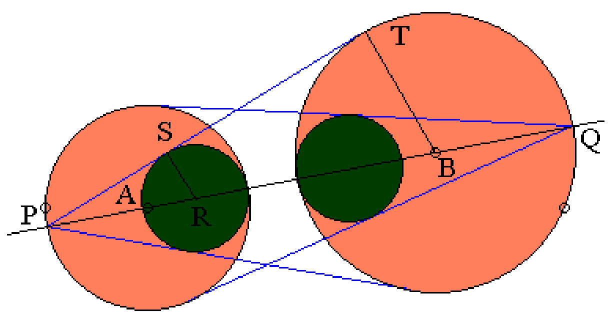

Рис. 8: Теорема о глазках

7. Если R — радиус внешнего круга, а r — радиус пунктирного круга, выразить c через r.

Решение: $r = 3b+4c$, $R = 5b+4c$, $R = b+2a$, $a+b = 2b+4c$ (последнее надо обосновать через равносторонний треугольник). Решая, получаем $b = 2c$, $a = 6c$, и $r = 10c$.

Задача 1.13. Теорема о зрачках 1. ([1, 6.2.1]).

Решение. Например, выразить тот и другой зрачок через r, R и d по подобию.

Задача 1.14. Теорема о зрачках 2. ([1, 6.2.2]).

Решение. Тоже выразить радиусы обеих окружностей через r, R, d при помощи подобия.

Задача 1.15. Развлекушка, простая задача.

Найти соотношение на радиусы кругов (рис. 9).

Решение: простая задача на подобие. Ответ — среднее геометрическое. Задумайтесь, кстати, почему среднее геометрическое называется таковым.

Задача 1.16. В прямоугольный треугольник вписаны вдоль катетов 8 одинаковых окружностей: 4 вдоль одного катета и 5 вдоль другого. Найти соотношение сторон треугольника.

Решение: ответ — египетский треугольник 3,4,5. Соединить центры окружностей в

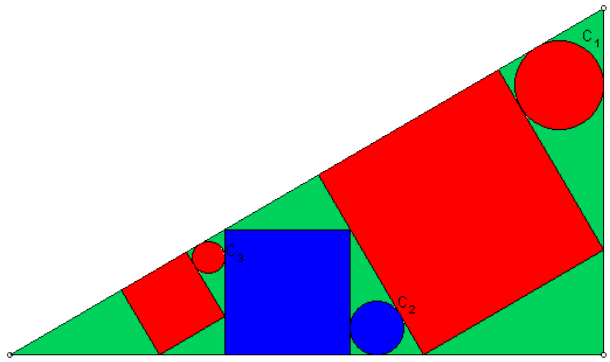

Рис. 9: Среднее геометрическое

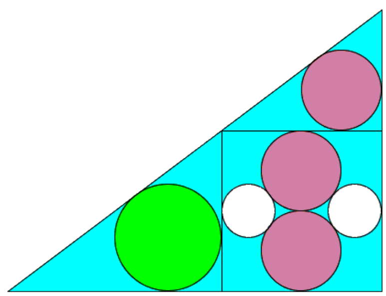

Рис. 10: Детская задача

уголках и получить треугольник, подобный исходному.

Задача 1.17. Детское сангаку.

Эта табличка была вывешена 13-летним подростком в 1847 году. Два розовых круга радиуса r и два белых круга радиуса t вписаны в квадрат, как показано на рис. 10. Квадрат вписан в треугольник вместе с двумя кругами радиусов R и r. Доказать, что $R = 2t$.

Решение: теорема Пифагора 11.

Задача 1.18. Сангаку в квадрате.

Найти радиус вписанного круга (рис. 12).

Наступает время хардкора.

Задача 1.19.* Чевиана равных вписанных окружностей.

Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что вписанные окружности треугольников ADC и ABD равны. Выразить длину AD через стороны (рис. 13).

*И дополнительный вопрос: если такие отрезки нарисовать для других двух сторон, будут ли они пересекаться в одной точке (то есть правильно ли употреблять термин “чевиана”)?

Решение. Пусть r — радиус вписанной окружности большого треугольника, а s — его полупериметр. Пусть s_1, s_2 — полупериметры $\triangle ABP, \triangle ACP$ соотв., а k — радиус вписанных в них окружностей. Обозначим AD через x. Тогда $s_1+s_2 = s+x$. Складывая площади, получаем $rs = ks_1 + ks_2$. Следовательно, $x = (rs/k) - s$. Из подобия

$$(1) \quad \frac{s-b}{s_1-x} = \frac{r}{k} = \frac{s-c}{s_2-x}$$

Получаем два уравнения на x:

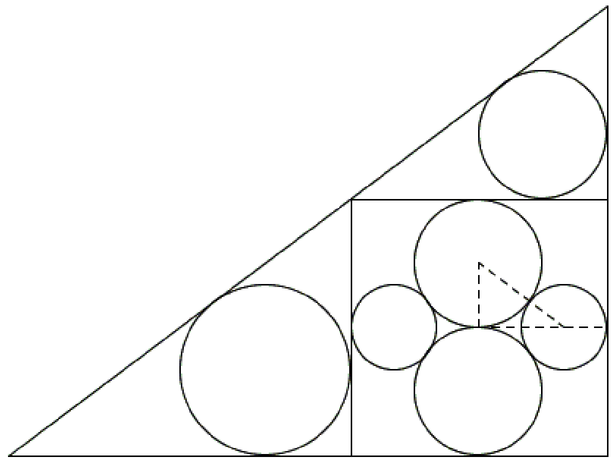

Рис. 11: Детская задача, решение

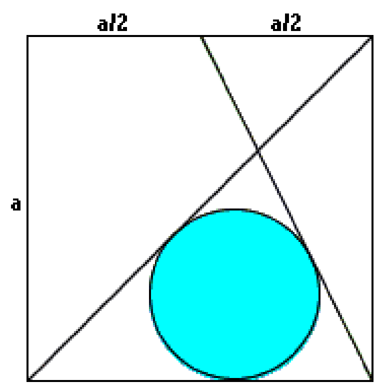

Рис. 12: Сангаку в квадрате

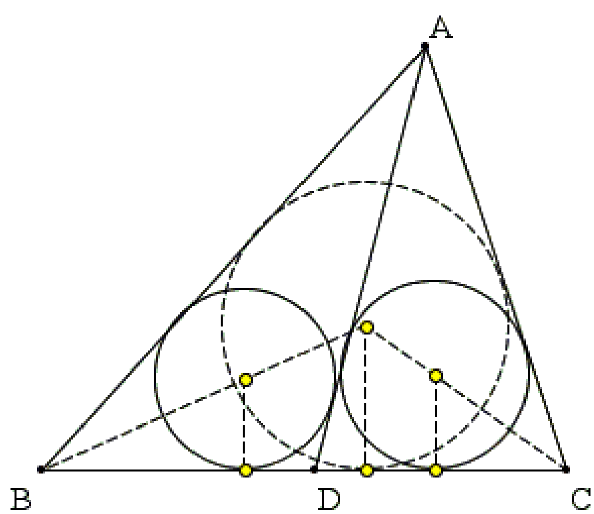

Рис. 13: Сангаку о чевиане вписанных окружностей

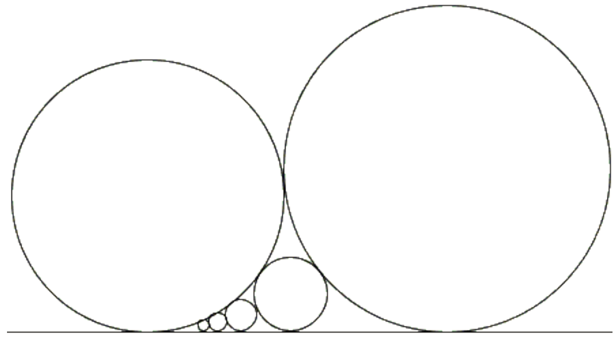

Рис. 14: Сангаку о последовательности окружностей

$$\frac{s(s-b)}{s_1-x}-s=x=\frac{s(s-c)}{s_2-x}-s$$

Приводим, складываем, решаем относительно x:

$$s(s-b)-ss_1+sx=xs_1-x$$

$$s(s-c)-ss_2+sx=xs_2-x$$

$$s(2s-b-c)-s(s_1+s_2)+2sx=x(s_1+s_2)-2x$$

$$sa-s(s+x)+2sx=x(s+x)-2x$$

$$2x^2=(s+x)^2-2sx-sa$$

$$x^2=s^2-sa$$

$$(2)x=\sqrt{s(s-a)}.$$

Задача 1.20. Еще сангаку на тему. ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом A. Точка D лежит на BC так, что окружности, вписанные в ABD and ADC равны. Выразить радиус этих окружностей через стороны.

Решение. Выразить k через (1) и (2). Ответ: $k=\frac{bc}{a+b+c+\sqrt{2bc}}$.

Задача 1.21.* (P.Yiu) Если чевиана AD обладает свойством равенства вписанных окружностей, то она же обладает свойством равенства вневписанных относительно A окружностей.

Задача 1.22.* Касательные круги

Окружность C_0 радиуса 1 км касается прямой L в точке Z. Круг C_1 радиуса 1 мм касается C_0 и L справа от C_0. Дальше последовательно строятся круги, так что C_i касается C_0 и C_{i-1}. В какой-то момент окружности становятся настолько большими, что дальнейшее построение становится невозможным (рис. 14). Сколько кругов нарисовано до того, как это произошло?

Решение: лемма о связи радиусов 15: $\frac{1}{\sqrt{R}}=\frac{1}{\sqrt{R_1}}+\frac{1}{\sqrt{R_2}}$. Доказательство леммы: Считаем расстояния между точками касания по Пифагору.

Решение сангаку: последовательность величин $\frac{1}{\sqrt{r_i}}$ выглядит так: $\frac{1}{1000}, 1, \frac{999}{1000}, \frac{998}{1000}, \ldots$. Итого нарисовано 1000 окружностей.

Задача 1.23.* На хорде L окружности C отмечена точка X. В секторы круга вписаны окружности, касающиеся хорды L в точке X. Доказать, что отношение их радиусов не зависит от положения точки X на хорде.

Решение: Пусть p и d — горизонтальная и вертикальная компоненты отрезка, соединяющего центр большой окружности и X, и a, b и R — радиусы окружностей. Тогда $p^2+(a+d)^2=(R-a)^2$ и $p^2+(b-d)^2=(R-b)^2$. Разрешаем относительно a,b:

$$a=(R^2-p^2-d^2)/2(R+d),$$

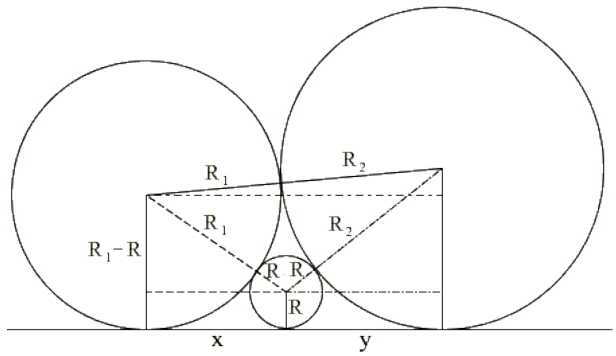

Рис. 15: Касающиеся окружности

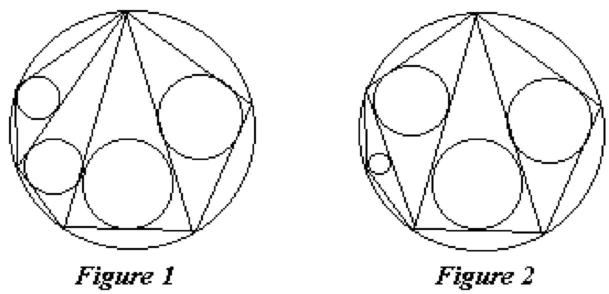

Рис. 16: Триангуляции многоугольника

$$b = (R^2 - p^2 - d^2)/2(R - d),$$

откуда $a/b = (R - d)/(R + d)$.

Задача 1.24.* (можно и на 10 баллов) Найти геометрическое решение предыдущей задачи.

Нечто посерьезнее и покрасивее:

Задача 1.25.* Древняя японская теорема о триангуляции многоугольника. Вписанный многоугольник диагоналями разбили на треугольники. В каждый треугольник вписали окружность. Тогда сумма радиусов этих окружностей не зависит от выбора триангуляции (рис. 16).

Замечание: доказать на самом деле достаточно для вписанного 4-угольника, поскольку флипами можно перейти от любой триангуляции к любой другой. Но мы докажем в общем случае.

Решение: теорема Карно: в любом треугольнике алгебраическая сумма расстояний от центра описанной окружности до сторон равна $R + r$:

$$OM_a + OM_b + OM_c = R + r.$$

Доказательство (для остроугольного треугольника): $r(a + b + c) = 2S_{ABC} = 2(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC})$, значит $r(a+b+c) = aOM_a + bOM_b + cOM_c$. Из подобных прямоугольных треугольников: $AHb/c = AHc/b = OMa/R$, откуда $OMa(b + c) = R(AHb + AHc)$. Аналогично, $OMb(a + c) = R(BHa + BHc)$, $OMc(a + b) = R(CHa + CHb)$. Складывая, получаем $OMa(b+c)+OMb(a+c)+OMc(a+b) = R(a+b+c)$. Прибавляем к имеющемуся и делим на $a + b + c$. Теперь японская теорема без труда доказывается (суммы-то алгебраические и расстояния до диагоналей сокращаются).

Задача 1.26.* Японская теорема о равных окружностях.

Рассмотрим точку C и точки M_i, лежащие на прямой, не проходящей через C, в правильном порядке. Предположим, что вписанные окружности треугольников $M_1CM_2, M_2CM_3, \ldots$

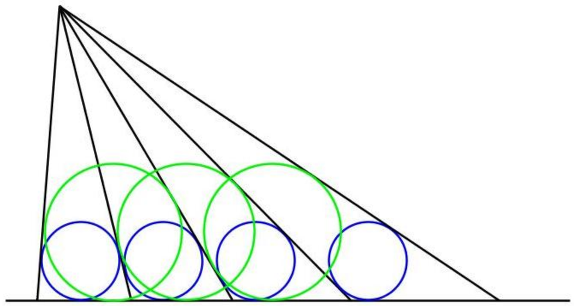

Рис. 17: Японская теорема о равных окружностях

равны. Тогда то же верно для треугольников $M_1CM_3, M_2CM_4, \ldots$ и более общо для треугольников $M_1CM_k, M_2CM_{k+1}, \ldots$. Рис.17.

Решение. Лемма 1: в треугольнике $1-\frac{2r}{h_c} = \tan(\alpha/2)\tan(\beta/2)$. Док-во: $\tan^2(\alpha/2) = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$, $\tan^2(\beta/2) = \frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}$ (из Герона и радиус вписанной окружности). Значит $\tan^2(\alpha/2)\tan^2(\beta/2) = \frac{(p-c)^2}{p^2}$. Имеем $(p-c)/p = 1 - c/p = 1 - ch_c r/pr\Delta h_c = 1 - 2Sr/Sh = 1 - 2r/h$. Лемма 2: в треугольнике ABC точка D лежит на AB, r_1, r_2, r — радиусы окружностей, вписанных в ACD, BCD и ABC, h — высота на AB. Тогда: $(1-\frac{2r_1}{h})(1-\frac{2r_2}{h}) = 1 - \frac{2r}{h}$. Доказательство: применяем предыдущую лемму и замечаем, что $\angle ADC/2 + \angle BDC/2 = \pi/2$, а значит произведение их тангенсов равно 1. Лемма 3: пусть точки M_i лежат на стороне AB треугольника ABC, $A = M_1, B = M_N$. Пусть радиусы окружностей, вписанных в $M_1CM_2, \ldots$ равны ρ. Тогда $(1-\frac{2\rho}{h})^{N-1} = 1 - \frac{2r}{h}$. Доказательство: по индукции из предыдущего. Из этой последней леммы следует японская теорема.

Задача 1.27.** (10 баллов) Рассмотрим функцию гиперболический синус (в простонародье шинус) $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Докажите, что последовательности точек на прямой, возникающие в японской теореме об окружностях, представляются в виде $\mathrm{sh}(a_n)$, где a_n — арифметическая прогрессия. Из этого факта, конечно теорема тоже следует.

Задача 1.28. Инверсия. Основные свойства инверсии: окружности (и прямые) в окружности (и прямые), конформность?. Задание инверсии в координатах [2].

Задача 1.29. Простенькие задачи на инверсию [2].

Задача 1.30.* Пару непересекающихся окружностей можно перевести инверсией в концентрические.

Задача 1.31. Поризм Штейнера. Обсудить, что инверсия не переводит центр окружности в центр.

Задача 1.32.* Сангаку Штейнера 1. Окружность $O'(r')$ касается $O(r)$ внутренним образом, а цепь касающихся окружностей $O_i(r_i)$ вписана в оставшуюся лунку. Доказать, что $\frac{1}{r_1} + \frac{3}{r_3} = \frac{3}{r_2} + \frac{1}{r_4}$. Рис. 18.

Решение: следует из общей формулы $r_t = \frac{rr'(r-r')}{rr' + t^2(r-r')^2}$, где касающиеся соседние круги в цепочке соответствуют значениям t, отличающимся на 1. Обозначим $A = rr'$, $B = r - r'$, имеем: $r_1 = A/(A+(t+1)^2B^2)$, $r_2 = A/(A+(t+2)^2B^2)$, $r_3 = A/(A+(t+3)^2B^2)$, $r_4 = A/(A+(t+4)^2B^2)$. Подставим в $1/r_1 + 3/r_3 = 3/r_2 + 1/r_4$, получим $(t+1)^2 + 3\cdot(t+3)^2 = 3\cdot(t+2)^2 + (t+4)^2$, что верно, ура!

Осталось доказать общую формулу. Здесь будет немного АдЪа. Пусть A_1, A_2 — окружности радиусов a_1, a_2 с центрами $(a_1, 0), (a_2, 0)$ и $a_2 > a_1$. Рассмотрим окружность C_t радиуса r_t с центром в $P_t(x_t, y_t)$, где

$$\phi_t = a_1a_2 + t^2(a_2 - a_1)^2,$$

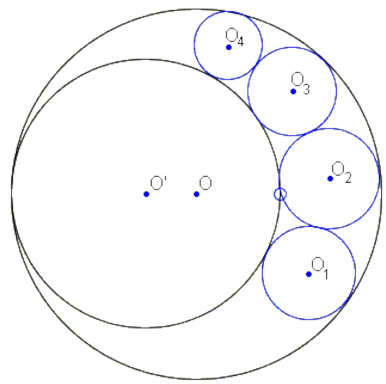

Рис. 18: Сангаку Штейнера 1

$$r_t = a_1 a_2 (a_2 - a_1)/\phi_t,$$
$$x_t = a_1 a_2 (a_2 + a_1)/\phi_t,$$
$$y_t = 2 t r_t.$$

Тогда при любом t окружность C_t касается A_1, A_2 и C_{t-1}.

Доказательство. Уравнение C_t:

$$(X^2+Y^2)\phi_t - 2a_1a_2(a_1+a_2)X - 4ta_1a_2(a_2-a_1)Y + 4(a_1a_2)^2 = 0.$$

Применим к C_t (уравнению) инверсию $X = \frac{4a_1a_2x}{x^2+y^2}$, $Y = \frac{4a_1a_2y}{x^2+y^2}$. Получим окружность $x^2+y^2-2(a_1+a_2)x-4t(a_2-a_1)y+4\phi_t = 0$, или эквивалентно

$$(2) \quad (x-a_1-a_2)^2 + (y-2ta_2+2ta_1)^2 = (a_2-a_1)^2.$$

Оппа! получаются окружности, зажатые между двумя вертикальными прямыми, а t — параметр высоты. Легко проверить, что инвертированные окружности касаются друг друга при $t - t' = 1$ и касаются нужных вертикальных прямых ($x = 2a_1$, $x = 2a_2$). Инвертируем обратно и все доказано.

Обсудить, какие окружности соответствуют $t = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \ldots$

Задача 1.33. Определение эллипса. Доказать, что ГМТ центров штейнеровых бусин является эллипсом.

Задача 1.34. Рассказ про сферы Данделена и конические сечения.

Задача 1.35. Доказать, что в общей формуле для штейнеровой цепочки из последней задачи эллипс имеет полуоси $\frac{a_1+a_2}{2}$ и $\sqrt{a_1a_2}$.

Задача 1.36.* Еще одно извратное сангаку.

Точки T, A, B лежат на одной прямой и $TA = 2r$, $TB = 2s$. Окружности $C_1(r)$ и $C_2(s)$ имеют диаметры TA и TB соответственно. Окружность $O_1(r_1)$ касается AB, $C_1(r)$ и $C_2(s)$ и дальше достраивается до штейнеровой цепочки $O_i(r_i)$ ($i = 1, 2, \ldots$). Доказать, что $\frac{7}{r_4} = \frac{2}{r_7} + \frac{5}{r_1}$. Рис. 20.

Решение: видно, что речь идет про окружности C_t при $t = n - \frac{1}{2}$ из предыдущего сангаку. Согласно полученным формулам, $r_1 = \frac{CB}{C+B^2(1-\frac{1}{2})^2}$, $r_4 = \frac{CB}{C+B^2(4-\frac{1}{2})^2}$, $r_7 = \frac{CB}{C+B^2(7-\frac{1}{2})^2}$, где $C = rs$, $B = r - s$. Подставляя в требуемое выражение, получаем: $7(C+B^2(4-\frac{1}{2})^2) = 2(C+B^2(7-\frac{1}{2})^2) + 5(C+B^2(1-\frac{1}{2})^2)$, что верно.

Если вы поняли принцип, то сможете придумать свои сангаку того же сорта. Главное в арифметике не запутаться.

Задача 1.37.* И последнее сангаку про Штейнера

Построим две касающиеся окружности Σ_1, Σ_2 и прямую L, соединяющую их центры. Впишем последовательность штейнеровых бусин так, что C_0 лежит диаметром на L.

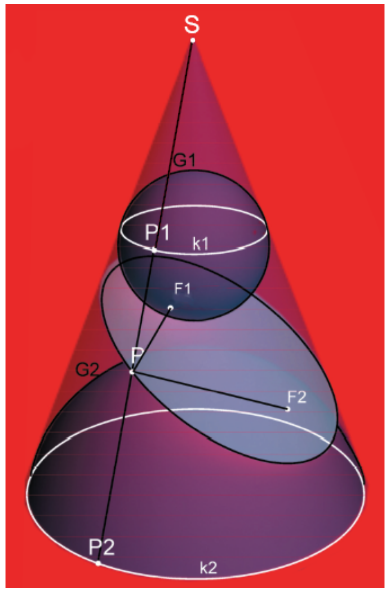

Рис. 19: Сферы Данделена

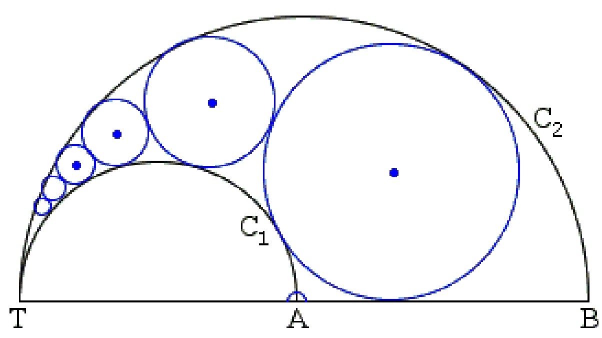

Рис. 20: Сангаку Штейнера 2

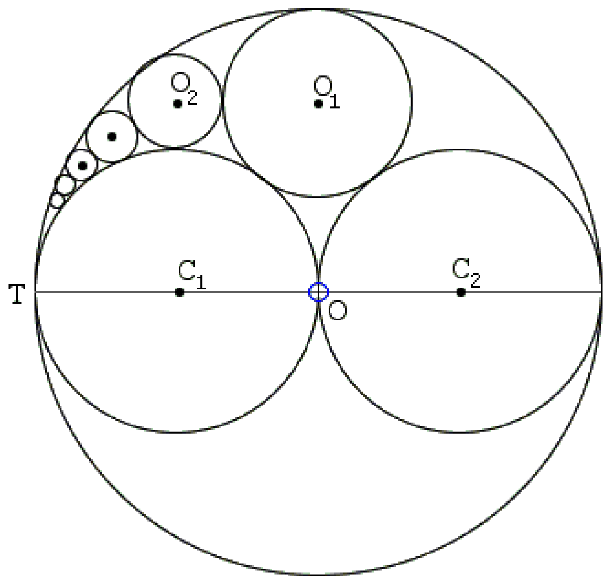

Рис. 21: Сангаку Штейнера 3

Пусть r_n и h_n — радиус и расстояние до прямой от центра окружности C_n. Доказать, что $h_n = 2nr_n$. Рис. 21.

Решение:

Рассмотрим уже знакомую нам инверсию (рис.22). Пусть R — радиус кружков, зажатых между вертикальными прямыми. Пусть n-й круг в арбелоне гомотетичен своему инверсному образу с коэффициентом d. Тогда $\frac{r_n}{R} = d = \frac{h_n}{2nR}$ (так как $2nR$ — высота центра инверсного образа n-й окружности), откуда все следует.

Сравните также полученный результат с общими формулами, которые мы вывели в одной из предыдущих задач.

2 Дополнительно

Задача 2.1. Теорема Наполеона. Обобщение: на сторонах достраиваются равнобедренные треугольники с углами α, β, γ, т.ч. $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Тогда образовавшийся треугольник имеет углы $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$.

Задача 2.2.** Теорема Наполеона для n-угольника (или даже n-точечника).

Задача 2.3. Гекслет Содди, трехмерная инверсия.

Список литературы

[1] А.В.Акопян. Геометрия в картинках.

[2] В.В.Прасолов. Задачи по планиметрии.

[3] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml

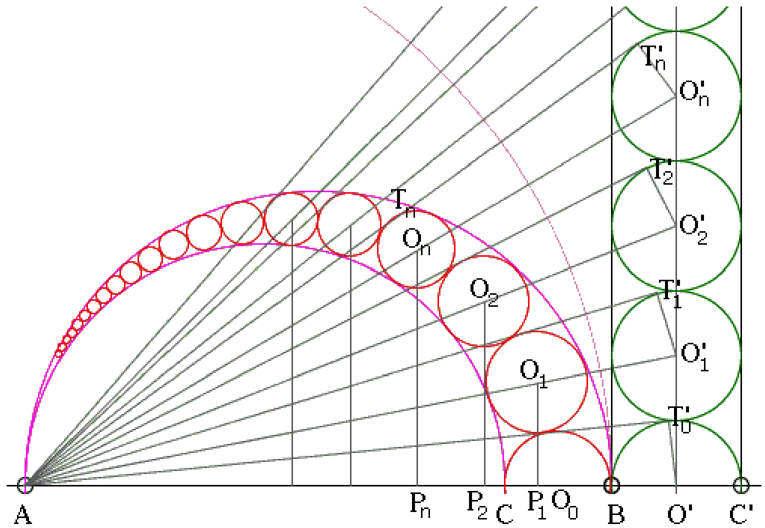

Рис. 22: Сангаку Штейнера 3. Решение

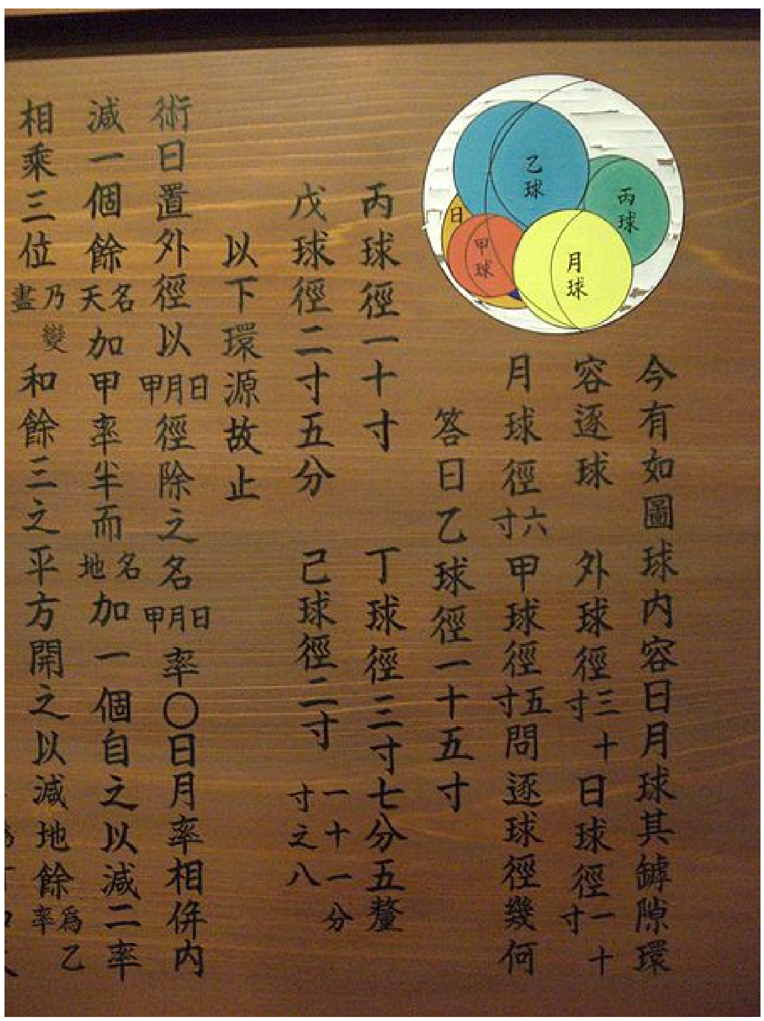

Рис. 23: Гекслет