Многогранники

Антон Айзенберг

В школе стереометрия представлена очень поверхностно. На этом предмете учат искать разные соотношения в пространственных фигурах, причем в качестве последних выступают как правило только шар, пирамиды и цилиндры. Умение рассчитывать те или иные соотношения безусловно полезно, но красота трехмерного математического мира при этом куда-то ускользает. Между тем существует огромное количество содержательных теорем, описывающих свойства объемных фигур, так называемых многогранников. Многогранник — это трехмерный аналог многоугольника, хотя строгие определения довольно сложны и как правило бесполезны. Мы будем заниматься более содержательными вещами — доказывать разные красивые утверждения. Их формулировки можно объяснить младшекласснику, однако их доказательства... Ну, в общем, если вы не боитесь векторов, графов, комплексных чисел, многочленов и обладаете воображением 80 уровня, то приходите.

Начнем мы с простейшей сферической геометрии, поскольку она играет важную роль при исследовании многогранников. Затем разогреемся на изучении правильных многогранников. Изучим несколько классических теорем: теорему Эйлера, теорему Минковского о еже, теоремы Коши, Александрова. Наконец рассмотрим третью проблему Гильберта. Эта проблема решена, а ее доказательство доступно школьникам (хотя пара моментов может быть не совсем понятна с первого раза).

Реквизит: правильные многогранники, призмы, антипризмы, икосаэдр из трех золотых прямоугольников.

1 План

Поговорим о различных определениях многогранников — выпуклых и невыпуклых.

Выпуклый многогранник. H-определение: пересечение конечного числа полупространств, являющееся ограниченным множеством. V-определение: выпуклая оболочка конечного числа точек. Пояснить определения.

Многогранные углы = сферические многоугольники. Для исследования многогранных углов нужно немного подучить сферическую геометрию.

Задача 1.1. Сферические теоремы синусов и косинусов. [8, стр.77]

Задача 1.2. Площадь сферического треугольника. Многоугольника.

Вывод: сумма углов сферического треугольника больше π. Дефект многогранного угла.

Дуальные (полярные) трехгранные углы.

Задача 1.3. Сферическое неравенство треугольника. [8, стр.76]

Задача 1.4. Доказать, что сумма плоских углов трехгранного угла $< \pi$. (Можно через дуальность или как-нибудь по-другому)

Задача 1.5. Доказать, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла $< \pi$. (Индукция и предыдущие две задачи).

*__Сферическая и плоская теоремы Коши–Лежандра__ о многоугольниках [3](тут неполное доказательство), [7] (тут полнее).

Стерадианная мера многогранного угла.

Задача 1.6. В тетраэдре сумма телесных двугранных углов минус сумма телесных трехгранных равна 4π. [9, Задача 65]

Задача 1.7. Найти аналог этого утверждения для произвольных многогранников.

Правильный выпуклый многогранник — многогранник, все грани которого — правильные многоугольники, и все многогранные углы которого — правильные сферические многоугольники.

(Доп.)Правильные невыпуклые многогранники.

Классификация топологических типов [7]. Пусть многогранник составлен из правильных n-угольников и в каждой вершине сходится k граней. Тогда из задачи 1.5 возможны только такие ситуации:

1) $n = 3, k = 3$ Тетраэдр.

2) $n = 3, k = 4$ Октаэдр.

3) $n = 3, k = 5$ Икосаэдр.

4) $n = 4, k = 3$ Куб.

5) $n = 5, k = 3$ Додекаэдр.

Для каждого из них надо доказать существование. Тетраэдр и куб — вроде очевидно. Октаэдр:

Способ 1. Две египетские пирамиды.

Способ 2. Отметим середины граней куба и натянем выпуклую оболочку.

Способ 3. Отметим середины ребер тетраэдра и натянем выпуклую оболочку. Или, что то же самое, срежем вершины тетраэдра.

Икосаэдр:

Способ 1. Берем определенные точки на ребрах октаэдра. Или на гранях куба.

Способ 2. По сути то же, что и 1, но более понятно. Берем три прямоугольника и располагаем их взаимно перпендикулярно с общим пересечением в центре каждого из них (реквизит).

Задача 1.8. При каком соотношении сторон прямоугольника получается правильный многогранник? Ответ: золотое сечение. Составляем простенькое уравнение.

Замечание: этот способ построения позволяет явно задавать вершины икосаэдра при помощи координат.

Способ 3. Самый лобовой. Антипризма с пятиугольником в основании + 2 пятиугольные пирамиды с боковыми гранями — правильными треугольниками.

Додекаэдр:

Способ 1. Двойственный к икосаэдру.

Способ 2. Явный способ склейки пятиугольников [9, Задача 74]. Показываем, что каждый раз все приклеивается, так как углы определяются однозначно по сферической теореме косинусов.

Способ 3. Приклейка к кубу "пентапризм" [8, Задача 14.2] или [7].

Пока совершенно не ясно, почему указанные конструкции зададут одинаковые (с точностью до подобия) многогранники. Более того, даже не совсем понятно, почему полученные многогранники будут правильными. Этот вопрос мы отложим до некоторого времени.

Задача 1.9. Найти двугранные углы у тетраэдра, октаэдра и додекаэдра.

Замечание: Запомните двугранный угол тетраэдра — он нам еще пригодится.

Задача 1.10.* К грани октаэдра приставили тетраэдр. Сколько граней у полученного многогранника (Спасибо А.Акопяну за эту задачу).

Немного о векторах.

Теорема Минковского о еже 1. Пусть M — выпуклый многогранник и Γ_i — его грани. Пусть S_i и $\vec{n}_i$ соответственно площадь и внешняя нормаль к грани Γ_i. Тогда $\sum S_i \vec{n}_i = 0$.

Кто-то из слушателей предложил совсем физическое доказательство через давление, но я его не очень понял. В любом случае, стоит обмыслить, можно ли его формализовать. Мое доказательство тоже отчасти физическое.

Задача 1.11. Вектор $\vec{v}$ равен 0 в том и только том случае, когда его скалярное произведение с любым вектором $\vec{w}$ равно 0.

Задача 1.12. Найти объем наклонной призмы с площадью основания S, нормалью к основанию $\vec{n}$ и вектором бокового ребра $\vec{w}$.

Пустим через многогранник постоянный поток воды с вектором скорости $\vec{w}$. Посчитаем, сколько воды втекает в многогранник и вытекает за 1 секунду. Получим, что разность объемов втекающей воды и вытекающей равна $\sum S_i(\vec{n}_i, \vec{w})$. С другой стороны, очевидно, что сколько втекло, столько и вытекло, поскольку объем многогранника не меняется. Значит $(\sum S_i\vec{n}_i, \vec{w}) = \sum S_i(\vec{n}_i, \vec{w}) = 0$. Поскольку вектор $\vec{w}$ был выбран произвольно, согласно задаче 1.11 $\sum S_i\vec{n}_i = 0$, ч.т.д.

Задача 1.13. (Этакая теорема Пифагора) Рассмотрим треугольную пирамиду $XABC$, такую что $\angle AXB = \angle BXC = \angle CXA = \pi/2$. Доказать, что $S^2_{ABC} = S^2_{AXB} + S^2_{BXC} + S^2_{AXC}$.

Задача 1.14.* (Опционально). Придумать аналог пространственной теоремы косинусов для площадей как обобщение предыдущего результата.

Теорема Минковского о еже 2.* В обратную сторону. Пусть заданы единичные векторы $\vec{n}_i$, порождающие $\mathbb{R}^3$ и числа $S_i > 0$, такие что $\sum S_i\vec{n}_i = 0$. Тогда существует единственный выпуклый многогранник, для которого $\vec{n}_i$ и S_i соответственно внешние нормали и площади граней. (опционально) [7, §36].

Замечание: иногда только вторую теорему называют теоремой Минковского.

Теорема Эйлера. Плоские графы и обобщенная теорема Эйлера.

Доказательство для многогранников через проекцию на сферу и подсчет площади [7, §25].

Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данными гранями и правилами склейки. Доказательство см. [3]. Лемма Коши–Лежандра с идеей корректного доказательства [7, §22].

Во-первых, почему все построенные нами ранее "правильные" многогранники действительно правильные, во-вторых, почему разные конструкции дают одно и то же. Все следует из теоремы Коши. !?продумать четкое и понятное обоснование.

Теорема Стокера? Теорема Александрова о двухгранных и плоских углах? [7, §26]. Разные результаты о жесткости и однозначности. Опционально.

Изгибаемые многогранники. Октаэдры Брикара. ?Найти изгибаемые несамопересекающиеся многогранники. Гипотеза кузнечных мехов.

Рассказ о теореме Сабитова [3]. Формула Тартальи (определитель Кэли–Менгера) для объема тетраэдра. Доказательство?

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Третья проблема Гильберта и ее решение — **теорема Дена** [1, стр.71], [4], [7].

Многоугольники (выпуклые) называются равновеликими, если у них одинаковые площади. Многоугольники называются равносоставленными, если их можно разрезать на одинаковые многоугольные кусочки.

Задача 1.15.* Если два многоугольника равновелики, то они равносоставлены.

Подсказки:

Задача 1.16. Доказать, что равносоставленность — отношение эквивалентности. Поэтому достаточно доказать равносоставленность многоугольника и прямоугольника со стороной 1.

Задача 1.17. Разрежем многоугольник на треугольники и каждый из них переложим в прямоугольник со стороной 1. Уложим все эти прямоугольнички в стопку. Таким образом, достаточно доказать, что любой треугольник равносоставлен прямоугольнику со стороной 1.

Задача 1.18. Треугольник равносоставлен параллелограмму. Все параллелограммы одной площади равносоставлены. Указание: через явное разрезание или через фундаментальные области [7].

Очевидно определение равносоставленных и равновеликих многогранников. Если два многогранника равносоставлены, то они равновелики.

Третья проблема Гильберта: верно ли, что если два многогранника равновелики, то они равносоставлены? Исторический комментарий про метод исчерпывания, Евклида и оригинальную формулировку третьей проблемы Гильберта [5].

Теорема Дена: Куб и правильный тетраэдр одного объема не являются равносоставленными.

Доказательство по книжке Шеня с пояснениями (еще есть книжка приватъ-доцента Кагана, в ней не используется базис Гамеля, зато она выноситъ мозгъ и написана на старорусском).

Определим псевдообъем многогранника как выражение вида $W(P) = \sum l_i \phi(\alpha_i)$, где l_i — длина i-го ребра, α_i — двугранный угол при нем, а ϕ — некоторая функция от угла, свойства которой мы в дальнейшем выпишем. Мы требуем от псевдобъема аддитивности, то есть если многогранник P разрезан на два многогранника P_1 и P_2, то должно выполняться равенство $W(P) = W(P_1) + W(P_2)$.

Немного повозившись с этим соотношением, получим, что оно эквивалентно следующим функциональным уравнениям на функцию ϕ:

$$\begin{cases} \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \\ \phi(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Используя стандартные соображения при решении функциональных уравнений, получим, что $\phi(rx) = r\phi(x)$, если $r \in \mathbb{Q}$ и в частности $\phi(r\pi) = 0$ для $r \in \mathbb{Q}$. Казалось бы, функция, удовлетворяющая всем этим соотношениям обязана быть тождественно нулевой (если она непрерывная, то это так), но... в общем случае это неверно. Оказывается:

Для любого числа α, несоизмеримого с π, существует функция ϕ, удовлетворяющая условиям выше и такая, что $\phi(\alpha) = 1$. Можно немного подискутировать на эту тему и про возможные обобщения. *В идеале надо рассказать про базис Гамеля.

Построим псевдообъем при помощи полученной функции. Поскольку функция удовлетворяет нужным функциональным уравнениям, псевдообъем аддитивен, значит для равносоставленных многогранников он должен быть одинаков.

Посчитаем псевдообъем куба.

Задача 1.19. Он равен 0.

Посчитаем псевдообъем правильного тетраэдра. Если двугранный угол α у тетраэдра несоизмерим с π, то псевдообъем можно сделать ненулевым. Таким образом, для доказательства теоремы Дена достаточно доказать, что двугранный угол α правильного тетраэдра несоизмерим с π.

Образуем комплексное число $\lambda = \cos\alpha + i \sin\alpha$.

Задача 1.20. Число α соизмеримо с π в том и только том случае, когда число λ является корнем из 1.

Вспомним, что угол правильного тетраэдра $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$. Значит надо проверить, является ли число $\lambda = \frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}$ корнем из 1 некоторой степени. Допустим, что является, т.е. λ является корнем уравнения $z^n - 1$. Но тогда, по известной теореме (например, [6, стр. 286]), $\bar{\lambda}$ также является корнем этого уравнения. Значит,

$$z^n - 1 = (z-\lambda)(z-\bar{\lambda})Q(z) = \left(z^2 - \frac{2}{3}z + 1\right)Q(z).$$

Ясно, что $Q(z)$ — многочлен с рациональными коэффициентами (при делении в столбик многочлена $z^n - 1$ на $z^2 - \frac{2}{3}z + 1$ ничего кроме рациональных чисел не возникает).

Задача 1.21.* Пусть $P(z)$ — многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Пусть $P(z) = R(z)Q(z)$, где R, Q — многочлены с рациональными коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Тогда $R(z)$ и $Q(z)$ имеют целые коэффициенты.

Это — следствие так называемой леммы Гаусса о многочленах [6, стр. 233]. Доказательство не очень сложное (через содержание многочлена) и на него можно потратить время, если оно осталось. Альтернативно: можно не заморачиваться общим фактом, а доказать частный случай, возникший у нас, это проще и понятнее.

Таким образом, согласно последней задаче не могло так получится, что $z^n - 1 = (z^2 - \frac{2}{3}z + 1)Q(z)$, так как у одного из этих многочленов рациональные, но нецелые коэффициенты. Значит λ не является корнем из 1, значит $\arccos\frac{1}{3}$ несоизмерим с π, значит согласно утверждению о базисе Гамеля существует такой псевдообъем, который не равен 0 для тетраэдра, но равен 0 для куба. Значит куб и тетраэдр неравносоставлены. Теорема Дена доказана.

Задача 1.22. Являются ли равносоставленными куб и октаэдр? Куб и додекаэдр? *Тетраэдр и октаэдр?

Теорема Сидлера [5]: если у двух многогранников совпадают объемы и все псевдообъемы для всех аддитивных функций ϕ, то многогранники равносоставлены. Это очень сложная теорема, и ее мы доказывать не будем.

2 Дополнительные топики.

Внутренняя геометрия.

Теорема Гаусса–Бонне для выпуклых многогранников. [9, Задача 57]

Теорема Александрова о развертке [3].

Теорема Коши–Александрова о единственности выпуклого многогранника с данной разверткой [3].

Зонотопы и всякие параллелоэдры (заботать, есть ли там что-то интересное) [9].

Изучить кристаллические решетки. Если есть что-то интересное — рассказать [2, 9].

Список литературы

[1] Н.К.Верещагин, А.Шень. Начала теории множеств. Лекции по математической логике и теории алгоритмов.

[2] Д.Гильберт, С.Кон-Фоссен. Наглядная геометрия.

[3] Н.П.Долбилин. Жемчужины теории многогогранников. Математическое просвещение, выпуск 5.

[4] Прив.-Доц. В.Каганъ. О преобразовании многогранниковъ.

[5] Пьер Картье. Разбиение многогранников: к вопросу о третьей проблеме Гильберта. Семинар Бурбаки. Матанализ и геометрия 45. Сборник переводов. 1990.

[6] А.И.Кострикин. Введение в алгебру. Основы алгебры.

[7] Igor Pak. Lectures on discrete and polyhedral geometry.

[8] В.В.Прасолов. Задачи по стереометрии.

[9] Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия. Стереометрия.