Оптимизационные задачи геометрии

Оптимизационные задачи планиметрии.

Ни у кого не вызывает сомнения, что луч света - прямой. Все, кто видел пятно фонарика или лучи заходящего солнца над кромкой леса, в это без труда поверят. Чем прямая лучше любой другой траектории. Оказывается имеется принцип Ферми, согласно которому свет "выбирает"тот путь, пройдя по которому он затратит наименьшее время. Иными словами, свет распространяется по оптимальной траектории. Время распространения по прямой меньше, чем время распространения по любой другой кривой, поэтому луч света - прямой. Допустим, мы наложили на свет дополнительные условия: пусть луч света идет из точки А в точку Б, но между делом отражается от некоторой поверхности. Как найти траекторию луча в этом случае?

На подобные вопросы мы и постараемся ответить, используя исключительно математические методы. Кроме того, существуют ведь и другие задачи, в которых нужно что-то сделать оптимальным образом. Например, как прорыть подземный переход, соединяющий четыре точки на углах перекрестка, чтобы рыть как можно меньше? Подобные задачи нетривиальны, интересны и незаслуженно проигнорированы школьной геометрией. По ходу курса планируется рассказать оптические свойства конических сечений и основы общей топологии на плоскости - обе теории играют важную роль в доказательствах задач, сформулированных выше.

Формальные требования к этому курсу было сложно придумать, от школьников требуется хорошее знание планиметрии, геометрическая интуиция и умение рисовать сложные чертежи. Поэтому будет требоваться сданный экзамен по построениям с помощью циркуля и линейки (сами построения в моем курсе почти не используются, однако велика вероятность, что школьник сдавший экзамен по построениям, обладает вышеупомянутыми качествами). Знание стереометрии будет полезно на одном из занятий, но, в целом, не обязательно.

(возможно тут появятся чертежи когда-нибудь)

1 день

Неравенство треугольника. Простейшие задачи (Лен.Мат.Кружки)

Задача 1.1. Даны точки A и B с одной стороны от прямой l. Найти на прямой точку C, такую что $AC + BC$ а) наименьшее возможное б) наибольшее возможное.

Задача 1.2. Точка A лежит внутри острого угла, образованного лучами l_1, l_2. Найти такое положение точек $B \in l_1$ и $C \in l_2$, что периметр треугольника ABC а) наименьший возможный б) наибольший возможный.

Задача 1.3. На окружности даны точки A и B. Найти такое положение точки C на окружности, что $AB + BC$ а) наименьшее возможное б) наибольшее возможное.

Задача 1.4. По окружности бегают три точки A, B, C. При каком положении этих точек периметр треугольника а) наименьший возможный б) наибольший возможный?

Задача 1.5.* По сторонам треугольника ABC бегают точки $A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB$. При каких положениях этих точек периметр треугольника $A'B'C'$ а) наименьший б) наибольший?

Вспомогательные задачи.

Подсказка: отразить B' относительно AB и BC.

Задача 1.6.* Доказать, что точки из предыдущей задачи существуют и для них выполнено $\angle AB'C' = \angle CB'A'$ и т.д.

Задача 1.7.* Доказать, что точки A', B', C' являются основаниями высот треугольника ABC.

Задача 1.8. Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами ортотреугольника.

2 день

Оптические свойства конических сечений и принцип отражения.

Определения: Эллипс, гипербола, парабола, фокусы.

Задача 2.1. Доказать, что график функции $y = x^2$ является параболой, а именно, множеством точек, равноудаленных от точки $(0, \frac{1}{4})$ и прямой $y = -\frac{1}{4}$.

Нарезание колбасы. Нарезание конуса. Сферы Донделена для случая эллипса. (Замечание: на экзамене старшеклассникам, возможно, нужно будет доказать, что боковое сечение цилиндра — эллипс, принцип здесь точно такой же).

Задача 2.2. Найти геометрическое место точек C таких что $AC+BC < d$ при разных значениях d.

Интуитивное представление о гладкости.

Задача 2.3. Пусть C — точка на эллипсе с фокусами A и B. Доказать, что угол между касательной к C и отрезком AC равен углу между касательной и отрезком BC.

Задача 2.4. Аналогичные оптические свойства параболы и гиперболы.

Принцип отражения. Пусть заданы точки A и B и кривая γ. Пусть точка C на кривой такова, что $AC+BC$ — минимально возможное (максимально возможное). Предположим, что в точке C кривая γ гладкая. Тогда угол между кривой и отрезком AC равен углу между кривой и отрезком BC.

Задача 2.5. Доказать этот принцип.

Задача 2.6. Задачи на использование этого принципа.

3 день

Минимизация расстояний между кривыми. Принцип ортогональности

Задача 3.1. Задана точка A и гладкая кривая γ, не проходящая через эту точку. Допустим существует такая точка $B \in \gamma$, что AB — наименьшее возможное (наибольшее возможное). Тогда отрезок AB перпендикулярен кривой γ.

Задача 3.2. Даны две непересекающиеся кривые γ_1 и γ_2. Допустим, что существуют такие точки $A \in \gamma_1$, $B \in \gamma_2$, что AB — минимально возможное. Тогда AB перпендикулярен обоим кривым.

Задача 3.3. Придумать такую кривую и точку, не лежащую на ней, что максимум (минимум) расстояния не существует.

Задача 3.4. Задача на комбинацию принципа отражения и принципа ортогональности.

Точка Торричелли = точка Ферма.

Задача 3.5.* Дан треугольник ABC. Найти на плоскости такую точку O, что $AO + BO + CO$ — а) максимально возможное б) минимально возможное.

Задача 3.6. Пояснение. Доказать, что такая точка в случае б существует и для нее $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 120°$.

Задача 3.7. Построить эту точку с помощью циркуля и линейки (с подсказкой).

4 день

Минимальная сеть на заданном наборе точек. Принцип минимальной сети.

Задача 4.1. Требуется соединить заданный набор точек (которые мы будем называть базовыми) проходами наименьшей возможной общей длины. Допустим, что это можно сделать, иными словами, что существует минимальная сеть — связный граф. Доказать:

а) Этот минимальный граф является деревом.

б) Каждое его ребро — прямолинейный отрезок.

Возможно, нам придется добавить некоторые "новые"вершины (не совпадающие с базовыми).

в) Степень каждой новой вершины равна 3, причем в новой вершине ребра сходятся под углами $120°$.

г) Если базовая вершина оказалась вершиной минимальной сети, то либо она висячая, либо имеет степень два и отрезки входят в нее под углом 180 или 120 градусов, либо она имеет степень 3 и ребра входят в нее под углами в 120 градусов.

Граф, соединяющий заданный набор точек в сеть, который обладает всеми перечисленными свойствами называется локально минимальной сетью. Доказанная задача гласит, что каждая минимальная сеть, если она существует, является локально-минимальной, что звучит несколько странно поначалу. Таким образом мы поняли, что минимальные сети стоит искать среди локально-минимальных сетей, которые имеют простое описание. Пример.

Задача 4.2. Построить какую-нибудь локально минимальную сеть на вершинах прямоугольника. Построить какую-нибудь другую локально-минимальную сеть на тех же вершинах.

Видно, что локально-минимальных сетей может быть несколько, однако не все из них минимальны.

Задача 4.3. Какая из двух локально-минимальных сетей в предыдущей задаче имеет меньшую длину (стороны прямоугольника, скажем, 5 и 6)?

Задача 4.4.* Построить две различных локально-минимальных сети на множестве вершин правильного шестиугольника. Какая из них имеет меньшую длину?

Комбинация принципа перпендикулярности и принципа минимальной сети.

Задача 4.5. На плоскости нарисованы три непересекающиеся окружности. Ленивый паук хочет натянуть между ними паутину так, чтобы от любой окружности до любой можно было добраться, при этом он хочет потратить как можно меньше паутины на строительство. Как он должен поступить? Что будет, если паук соединяет не окружности, а какие-то другие кривые?

5 день

Начала общей топологии.

Вопрос, который мы изучим сегодня таков: когда существуют максимум/минимум? Многие предыдущие задачи начинались со слов "если минимум/максимум существует, то ...". Оказывается, что во многих ситуациях интуитивно понятное существование "экстремума"может быть строго доказано с помощью общей топологии. Для объяснения основных понятий мне не понадобится ничего из того, что было ранее в курсе, так что кривые, эллипсы, отражения, минимальные сети и прочее можно на ближайшие полчаса забыть.

Определения. Предельная точка множества, замкнутость множества, ограниченность множества точек на плоскости. Компактные множества = замкнутые и ограниченные.

Задача 5.1. Являются ли следующие множества точек замкнутыми? ограниченными? компактными?
$x \geqslant 0$;
$x^2 + y^2 = 1$;
$x^2 + y^2 \leqslant 1$;
$x^2 + y^2 < 1$;
$xy = 0$;
$xy > 0$.

Задача 5.2. Доказать, что эллипс компактен. Что можно сказать про гиперболу? Она замкнута, ограничена?

Задача 5.3.* Существует ли кривая бесконечной длины, которая ограничена, но не замкнута?

Определение. Непрерывная функция, сопоставляющая n точкам на плоскости вещественное число $f\colon (X_1, \ldots, X_n) \mapsto c$, $X_i \in \mathbb{R}^2$. Область определения: когда каждая точка бегает по своему множеству $X_i \in A_i$.

Точки минимума/максимума функции.

Задача 5.4. Пусть $f(X)$ — функция, сопоставляющая каждой точке на плоскости расстояние от этой точки до точки $(0, 0)$. Является ли эта функция непрерывной? Существует ли у нее минимум/максимум на множестве а) $\mathbb{R}^2$ б) $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ в) круг без нуля?

Теорема. Пусть каждое множество A_i компактно, а f — непрерывная функция, сопоставляющая набору точек $X_i \in A_i$ некоторое число. Тогда функция f имеет минимум и максимум.

Задача 5.5. Пусть γ_1, γ_2 — две замкнутые кривые. Доказать, что существуют точки $A \in \gamma_1, B \in \gamma_2$, такие что AB — минимально возможное. максимально возможное.

Задача 5.6. Задан произвольный выпуклый четырехугольник. По его сторонам бегают точки. Доказать, что существует такое положение этих точек, что периметр полученного вписанного четырехугольника минимально возможный (максимально возможный). Доказать, что если эти точки находятся на сторонах (не попадают в вершины), то в каждой точке такого минимального четырехугольника угол падения равен углу отражения.

Задача 5.7. Аналогичная задача, только n точек бегают по произвольному овалу — выпуклой гладкой замкнутой кривой. А расстояние надо максимизировать. Эта задача называется задачей о биллиарде.

Задача 5.8.** Доказать, что минимальная сеть на конечном множестве точек всегда существует.

6 Экзамен

Задача 6.1. Даны точки A и B с одной стороны от прямой l. Найти на прямой точку C, такую что $AC + BC$ а) наименьшее возможное б) наибольшее возможное.

Задача 6.2. Точка A лежит внутри острого угла, образованного лучами l_1, l_2. Найти такое положение точек $B \in l_1$ и $C \in l_2$, что периметр треугольника ABC а) наименьший возможный б) наибольший возможный.

Задача 6.3. Построить в данном треугольнике точку Торричелли.

Задача 6.4. Доказать, что в наклонном сечении кругового цилиндра получится эллипс.

Задача 6.5.* Доказать, что сечение конуса, пересекающее обе его компоненты, является гиперболой.

Задача 6.6. Построить в данном треугольнике вписанный треугольник наименьшего возможного периметра с помощью циркуля и линейки.

Задача 6.7. Построить какую-нибудь локально-минимальную сеть на вершинах прямоугольника. *Посчитать её длину.

Задача 6.8.* Описать какую-нибудь локально-минимальную сеть на более хитром множестве точек.

Задача 6.9. Ленивый паук хочет соединить три окружности паутинкой наименьшей возможной длины. Какими свойствами обязана обладать такая паутина. Построить такую паутину.

Задача 6.10. Является ли множество $\{0 \leqslant xy \leqslant 1\}$ замкнутым? Ограниченным? Компактным?

Задача 6.11. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — замкнутые не пересекающиеся кривые (будет конкретный рисунок). По ним бегают точки A, B, C, D соответственно. Доказать, что существует такое положение точек, при котором длина ломаной $ABCD$ минимально возможная. Какими свойствами обладает такой набор точек?