КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа.

Все знают, что не существует такого вещественного числа, что его квадрат равен минус единице. А что будет, если придумать такое НЕвещественное число i, которое в квадрате даёт -1? Тогда, если мы хотим складывать i и обычные числа, и умножать i на обычные числа, то надо ввести числа вида a+bi, где a и b вещественные. Такие числа и называются комплексными. На первый взгляд, это кажется абсурдным: зачем выдумывать такие числа? Только для того, чтобы квадратное уравнение имело решение? Не совсем. Многие явления природы удобнее описывать с помощью комплексных чисел, да и большинство теорем в математике становятся проще, если использовать комплексные числа вместо вещественных. Каждый, кто собирается заниматься математикой или естественными науками, рано или поздно с ними столкнется. Но при этом основные факты о комплексных числах несложны и доступны восьмикласснику.

Однако, курс, который я буду читать, охватывает несколько больше, чем основные определения, поэтому от слушателей потребуется знание тригонометрии и основ алгебры.

Считается, что школьник знает тригонометрию, если он знает следующие факты: (1) что такое косинус и синус угла, большего 180 градусов (2) формула косинуса и синуса суммы двух углов. Знание алгебры подразумевает набившие оскомину школьные факты: решение квадратного уравнения, теорема Виета, последовательный поиск корней уравнения, умение перемножать многочлены.

1 День

Определения: комплексное число, вещественная часть, мнимая часть, сумма, разность, умножение, сопряженное число, модуль.

Задача 1.1. $(4+5i)+(3+2i)(1-i)=?$;

Задача 1.2. $(5+3i)\overline{(7-2i)}=?$;

Задача 1.3. $(a+bi)(c+di)=?$;

Задача 1.4. Найти все комплексные числа z, такие что $\bar{z}=z$. Найти все числа, такие что $\bar{z}=-z$.

Задача 1.5. Доказать, что если $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, то
$z_1z_2 = z_2z_1$,
$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$,
$z_1(z_2+z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$,

Задача 1.6. Доказать, что $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

Задача 1.7. Если $z \in \mathbb{C}$, то $|z|^2 = z\bar{z}$.

Задача 1.8. Доказать, что $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Задача 1.9. Пусть $P(z) = z^3 + 4z^2 + (5-2i)z + (3-2i)$ — многочлен третьей степени. Найти $P(1+i)$.

Деление

Задача 1.10. $\frac{1-2i}{3+4i} =?$; $\frac{3-i}{1+i} + \frac{5-2i}{1-3i} =?$

Задача 1.11. Доказать, что $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Задача 1.12. Доказать, что $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Квадратные уравнения с вещественными коэффициентами.

Задача 1.13. Какое комплексное число при возведении в квадрат даёт -9, -16, 25?

Задача 1.14. Найти корни уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Задача 1.15. Найти корни уравнения $x^2 + 6x + 25 = 0$. (используя стандартную формулу через дискриминант). Проверить, что получились и вправду корни. Чему равна сумма корней? А произведение? А как найти эти величины, не считая корни?

Эмпирический вывод: формула корней квадратного уравнения и теорема Виета верны для комплексных корней. Вспоминаем доказательства этих формул и убеждаемся, что это действительно так.

Пример уравнения с комплексными коэффициентами (неопределенные коэффициенты).

Задача 1.16. Найти комплексное число, при возведении которого в квадрат получится $2i$. Найти какое-нибудь другое число с тем же свойством.

Задача 1.17. Найти как можно больше комплексных чисел, четвертые степени которых равны -1.

Задача 1.18. Решить уравнение $x^2 + (2+3i)x + \left(-\frac{5}{4} + \frac{5}{2}i\right) = 0$.

2 День

Геометрическое представление комплексных чисел на плоскости. Смысл модуля, вещественной и мнимой части.

Задача 2.1. Изобразить числа $1+i, 1+2i$ и их произведение на плоскости.

Задача 2.2. Найти геометрическое место точек $z \in \mathbb{C}$ на плоскости, если
$\Re z = 4$;
$\Im(i \cdot z) = 2$;
$\Re((1+2i)z) = 5$;
$|z| = 2$;
$|z - (3+5i)| = 3$
$|z - a| = r$, $a \in \mathbb{C}$ — фиксированное комплексное число, r — неотрицательное вещественное число.

Задача 2.3. Найти точки, для которых одновременно $|z - 6i| = 5$ и $\Im z = 2$.

Аргумент числа, неоднозначность в его определении (с точностью до $2\pi n$). Тригонометрическая форма записи.

Задача 2.4. Представить в тригонометрической форме числа: $1+\sqrt{3}i$, $-4-4i$.

Задача 2.5. Что происходит при сопряжении с модулем и аргументом числа?

Задача 2.6. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Доказать, что $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$. Вывод: при умножении модули чисел перемножаются а аргументы складываются.

Задача 2.7. Известно, что $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2, \operatorname{Arg} z_1 = \varphi_1, \operatorname{Arg} z_2 = \varphi_2$. Доказать, что $|z_1/z_2| = r_1/r_2$ (уже было) и $\operatorname{Arg}(z_1/z_2) = \varphi_1 - \varphi_2$.

Задача 2.8. Построить с помощью линейки и транспортира (циркуля) произведение двух наобум взятых комплексных чисел.

Задача 2.9. Доказать формулу Муавра $[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi+ i\sin n\varphi)$.

Задача 2.10. Посчитать (представить в виде $a+bi$) числа i^{100}, $(1-i)^{52}$, $\frac{(1+i)^{40}}{(1-\sqrt{3}i)^{20}}$.

Задача 2.11.* Используя формулу Муавра выразить $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

3 День

Извлечение корней из комплексных чисел при помощи деления аргумента.

Задача 3.1. Изобразить и вычислить все корни третьей степени из 8. Проверить, что это действительно корни.

Задача 3.2. Изобразить все корни пятой степени из 3.

Задача 3.3. Найти (в алгебраической записи) все корни уравнения $x^2 = i$; $x^6 = -1$, $x^8 = 1$, $x^{12} = 1$.

Задача 3.4.* Пусть $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$. Доказать, что у числа z существует n различных корней степени n, причем все эти корни лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

Задача 3.5. Нарисовать комплексные корни степени n из 1. (Они называются корнями из единицы. ну кто бы мог подумать)

Задача 3.6.* Доказать, что для любого фиксированного n существует такой корень ε из единицы степени n, что все остальные корни из единицы степени n равны его степеням $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^n = 1$. Будем называть такой корень ε простым. Однозначно ли определен простой корень из единицы? Сколько существует простых корней из 1 степени 17? А степени 30? Сформулируйте общую гипотезу: чему равно количество простых корней степени n из единицы.

Задача 3.7.* Пусть $1 = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ — множество всех корней степени n из единицы. Докажите, что

$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = 0$,

$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2 = 0$,

$\ldots$

$\delta_1^{n-1} + \delta_2^{n-1} + \ldots + \delta_n^{n-1} = 0$,

Но $\delta_1^n + \delta_2^n + \ldots + \delta_n^n = n$,

Задача 3.8. Доказать, что у любого квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$ с комплексными коэффициентами a, b, c существует комплексный корень.

Задача 3.9. !!!допридумать пример уравнения

Формулировка основной теоремы алгебры, без доказательства.

Задача 3.10. Любой многочлен с комплексными (и, в частности, вещественными коэффициентами) разлагается в произведение линейных: $P(z) = a(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — комплексные корни многочлена P.

Задача 3.11. Пусть $az^2 + bz + c$ — квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами. Пусть z — его корень (возможно, комплексный). Доказать, что $\bar{z}$ — также корень этого трехчлена.

Задача 3.12.* Аналогично для произвольного многочлена.

Задача 3.13.* Доказать, что любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение линейных множителей и квадратных трехчленов с отрицательным дискриминантом.

4 день

Задача 4.1. !!!Разные геометрические задачи, додумать..

*Преобразования плоскости. Сдвиги на вектор, повороты на угол, гомотетии с коэффициентом.

Задача 4.2. Описать геометрически преобразования $z \mapsto z + (1 + 2i)$;

$z \mapsto \bar{z}$

$z \mapsto 3z$;

$z \mapsto iz$;

$z \mapsto (\cos\varphi + i\sin\varphi)z$, где φ — наперед заданный угол;

$z \mapsto r(\cos\varphi + i\sin\varphi)z$, где r и φ — заданные расстояние и угол.

$z \mapsto (3 + 4i)z - (1 + 2i)$.

Инверсия. Геометрический смысл преобразования $z \mapsto \frac{1}{z}$. Дробно-линейное преобразование.

Задача 4.3.* Доказать, что дробно-линейное преобразование можно представить как последовательное применение инверсий, отражений, поворотов, гомотетий и сдвигов.

5 день

Повторение и решение всяких разных типовых задач.

6 Экзамен

Задача 6.1. Посчитать $(1 - 2i)\overline{(3 + 4i)} - \frac{5+7i}{6+8i}$.

Задача 6.2. Решить уравнение $x^2 - (3 - 2i)x - (1 + i)$, $z - |z| = -8 + 12i$.

Задача 6.3. Решить уравнение $x^3 = -i$.

Задача 6.4. Изобразить на плоскости решения уравнения $z^10 = i$.

Задача 6.5. Найти $(-1 + \sqrt{3}i)^{60}$.

Задача 6.6. Используя формулу Муавра выразить $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Задача 6.7. Изобразить множества точек
$|z| < 5; |z - i| > 2;$
$-\pi/3 < \mathrm{Arg}(z - 1 + i) < \pi/3;$
$|z - i| \geqslant |z - 1|;$
$|z - 2i| + |z + i| = 3;$

Задача 6.8. Доказать, что сумма корней из единицы степени $n > 1$ равна 0.

Задача 6.9. Найти произведение всех корней из 1 степени n.