Комбинаторика биномиальных коэффициентов

Комбинаторика+ (биномиальные коэффициенты)

Комбинаторика - это не только олимпиадные задачки, но и серьезная область исследования. Очень многие алгебраические, геометрические, топологические, вероятностные задачи сводятся к подсчету числа объектов определенного рода. Таким подсчетом как раз и занимается комбинаторика. Думаю, нет нужды говорить, что в прикладной математике, всяком там computer science, комбинаторика также играет главную роль. В комбинаторике есть несколько основополагающих методов, одному из которых - производящим функциям - и будет посвящен этот курс.

Вы наверняка видели треугольник Паскаля и знаете как посчитать его элементы. На него можно долго смотреть и придумывать про него разные теоремы. Поначалу примерно этим мы и займемся. Постепенно мы подойдем к понятию производящей функции и научимся решать произвольные линейные рекуррентности. В частности, выведем явную аналитическую формулу для чисел Фибоначчи, и поймем как они связаны с золотым сечением. Также планируется прорешать две другие известные проблемы: задачу о числе счастливых билетов и задачу о суммировании биномиальных коэффициентов взятых с определенным интервалом.

Этот курс классифицируется как сложный. Вот краткий список требований: комбинаторика- и комбинаторика (надо сдать соответствующие экзамены. Необходимо чётко понимать, что такое число сочетаний, и знать, что треугольник Паскаля образован как раз из этих чисел). Кроме того, неплохо бы знать основы алгебры (перемножение многочленов, деление многочленов с остатком) и иметь общее представление о комплексных числах (знание корней из 1 потребуется ровно на одном занятии и не очень принципиально). Умение считать сумму членов геометрической прогрессии, как конечной, так и бесконечной. Знание матанализа совершенно не обязательно, но может помочь.

1 день

Напоминание определения C_n^k. Треугольник Паскаля. Число подмножеств. Число способов идти вправо-вверх.

Задача 1.1. Доказать формулу бинома Ньютона $(1+t)^n = C_n^0 + C_n^1 t + \ldots + C_n^n$.

Задача 1.2. Доказать соотношения

$C_n^{n-k} = C_n^k$;
$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$;
$C_n^0 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 \ldots \pm C_n^n = 0$;
$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \ldots + C_{k+l}^k = C_{k+l+1}^{k+1}$;
$(C_n^0)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Задача 1.3. Посчитать суммы $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$ и $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.

Задача 1.4. Посчитать суммы $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$,
$C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots$,
$C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots$,
$C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots$.

Задача 1.5. Посчитать суммы биномиальных коэффициентов через 3.

Понятие дискретного преобразования Фурье. Формулировка теоремы об обратном дискретном преобразовании Фурье.

Задача 1.6.* Доказать теорему.

Задача 1.7. Явно вычислить $C_{100}^0 + C_{100}^4 + C_{100}^8 + \ldots + C_{100}^{100}$.

2 день

Арифметические прогрессии рода k. Ряды.

Задача 2.1. Продолжить последовательность $1, 2, 4, 7, 11, 16, ...$

Определение. Разность последовательности. Арифметическая прогрессия рода k.

Задача 2.2. Доказать, что $C_k^k, C_{k+1}^k, C_{k+2}^k, \ldots$ — арифметическая прогрессия рода k. Чему равна ее разность?

Задача 2.3. Пусть $P(x)$ — многочлен степени k. Тогда $P(0), P(1), P(2), \ldots$ — прогрессия рода k.

Задача 2.4. Существует ли последовательность, которая одновременно является геометрической и арифметической рода k?

Задача 2.5. Доказать, что прогрессия рода k однозначно определяется своими первыми $k+1$ членами.

Задача 2.6.* Для любой прогрессии рода k $a_0, a_1, \ldots$ существует многочлен степени k, такой что $a_i = P(i)$.

Задача 2.7. Вопрос. Какой многочлен задает прогрессию $C_k^k, C_{k+1}^k, C_{k+2}^k, \ldots$?

Отступление. Тренировка быстрого умножения многочленов.

Задача 2.8. $(1 + 2t + 3t^2 + 5t^3)(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5) =?$

Ряды = "бесконечные многочлены". Можно складывать, перемножать.

Задача 2.9. Умножить $(1 + t + t^2 + t^3 + \ldots)(1 + t + t^2 + t^3 + \ldots)$.

Шары и перегородки.

Задача 2.10. Сколько способов разбить число m в сумму n неотрицательных слагаемых? (при перестановке получается другая сумма) Сколько неотрицательных целочисленных решений имеет уравнение $k_1 + \ldots + k_n = m$?

Задача 2.11. Найти $(1 + t + t^2 + t^3 + \ldots)^n$

Многие функции представляются в виде ряда. Пример $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots$. Это — всем хорошо известная сумма геометрической прогрессии. Утверждение б.д. если представление функции в виде ряда существует, то оно единственно.

Задача 2.12. Найти представление в виде ряда для функции $\frac{1}{(1-t)^k}$.

3 день

Определение производящей функции последовательности

Задача 3.1. Записать производящие функции следующих последовательностей:

$1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$;
$1, 4, 6, 4, 1, 0, 0, 0, \ldots$
$1, 1, 1, 1, 1, \ldots$;
$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$;
$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$;
$1, \alpha, \alpha^2, \ldots$;
$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$;
$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.

Задача 3.2. Доказать, что если $c_n = \gamma a_n + \delta b_n$, то $f_c(t) = \gamma f_a(t) + \delta f_b(t)$.

Задача 3.3.* Найти производящую функцию последовательности $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$.

Задача 3.4.** Пусть $\{a_0, a_1, \ldots\}$ — прогрессия рода k. Тогда существуют такие $\gamma_0, \ldots, \gamma_k$, что $a_i = \gamma_0 C_i^0 + \gamma_1 C_{i+1}^1 + \gamma_2 C_{i+2}^2 + \ldots + \gamma_k C_{i+k}^k$. Вывести из этого утверждения, что $a_0, a_1, \ldots$ — является прогрессией рода k тогда и только тогда, когда её производящая функция имеем вид $\frac{R(t)}{(1-t)^{k+1}}$, где $R(t)$ — многочлен степени не больше k.

Задача 3.5.** Как связаны коэффициенты многочлена $R(t)$ из предыдущей задачи и многочлена, который задает прогрессию рода k, т.е. многочлена $P(x)$, такого что $P(k) = a_k$?

Задача 3.6. Представить в виде ряда $\frac{1}{1-2x}$;
$\frac{1}{(a-x)^2}$;
$\frac{1}{(1-\alpha x)^n}$;
$\frac{1}{(a-x)^n}$.

4 день

Решение линейных рекуррентностей.

Задача 4.1. Является ли последовательность Фибоначчи арифметической прогрессией рода k для какого-нибудь k?

Вывести формулу для чисел Фибоначчи.

Задача 4.2. Доказать, что производящая функция чисел Фибоначчи равна $\frac{1}{1-t-t^2}$.

Задача 4.3. $1-t-t^2=(1-\alpha t)(1-\beta t)$. Найти α, β.

Задача 4.4. $\frac{1}{1-t-t^2}=\frac{c}{1-\alpha t}+\frac{d}{1-\beta t}$. Найти c, d.

Задача 4.5. Доказать формулу Бине.

Формулировка общего алгоритма для поиска аналитической формулы линейной рекуррентности. Еще примеры.

Задача 4.6. Найти аналитическую формулу для рекуррентности $a_n = -a_{n-1}+2a_{n-2}$, $a_0=1, a_1=3$.

Задача 4.7. $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}, a_0=0, a_1=1, a_2=-1$.

Задача 4.8. Найти сотый член последовательности, если $a_n = 2a_{n-1} - 3a_{n-2}$, $a_0=1, a_1=2$.

!!!Еще придумать...

5 день

Счастливые билеты.

Задача 5.1. На трамвайном билетике написан номер из 6 цифр. Билет считается счастливым, если сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр. Доказать, что счастливых билетов столько же сколько билетов, у которых сумма всех цифр равна 27.

Задача 5.2.* Найти число счастливых билетов.

Задача 5.3. Доказать, что число счастливых билетов равно коэффициенту при t^{27} в многочлене $(1+t+t^2+\ldots+t^9)^6$.

Задача 5.4. Заметим, что $(1+t+t^2+\ldots+t^9)^6=(1-t^{10})^6\frac{1}{(1-t)^6}$. Разложить $(1-t^{10})^6$ по формуле бинома Ньютона, а $\frac{1}{(1-t)^6}$ по одной из предыдущих задач, перемножить два ряда и найти таким образом искомый коэффициент.

Задача 5.5. Какой у этого ряда коэффициент при t^{100}?

Задача 5.6. Кинули пять кубиков. Какова вероятность того, что в сумме выпадет ровно 17?

Повторение.

6 зачет

Задача 6.1. Доказать какое-нибудь комбинаторное тождество на биномиальные коэффициенты (более-менее любое из первого дня).

Задача 6.2. Посчитать сумму каких-нибудь биномиальных коэффициентов через 4 или через 3.

Задача 6.3. Найти производящую функцию некоторой последовательности (арифметической прогрессии рода 0, 1 или 2, геометрической прогрессии или суммы их).

Задача 6.4. Разложить в сумму простейших дробей дробь со знаменателем второго или третьего порядка методом неопределенных коэффициентов.

Задача 6.5. Решить линейную рекуррентность второго порядка.

Задача 6.6. Решить линейную рекуррентность второго порядка с кратным корнем, либо с комплексными корнями.

Задача 6.7. Задача аналогичная подсчету числа счастливых билетов.