Сферическая геометрия.

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — математическая дисциплина, изучающая геометрические образы (точки, линии, фигуры), находящиеся на сфере, и соотношения между ними.

Считается, что начала неевклидовой геометрии были заложены Лобачевским и Гауссом. Но на самом деле, люди ещё задолго до их открытий владели содержательной геометрической схемой, отличной от традиционной геометрии Евклида, т. е. уже знали одну из неевклидовых геометрий. Основные факты сферической геометрии были основательно изучены еще в древности в связи с задачами астрономии. Поскольку поверхность земли приближенно имеет форму сферы, можно утверждать, что "земная геометрия" также является геометрией сферической (это реально ощущается при измерениях, затрагивающих значительные участки земной поверхности).

Самым же первым обращением человечества к тому, что потом получит название сферической геометрии, была планетарная теория греческого математика Евдокса (ок. 408-355), одного из участников Академии Платона. Это была попытка объяснить движение планет вокруг Земли с помощью четырех вращающихся концентрических сфер, каждая из которых имела особую ось вращения с концами, закрепленными на охватывающей сфере, к которой, в свою очередь, были "прибиты" звезды. Таким образом объяснялись замысловатые траектории планет (в переводе с греческого "планета" — блуждающая). Именно благодаря такой модели древнегреческие ученые умели достаточно точно описывать и предсказывать движения планет. Это было необходимо, например, в мореплавании, а так же во многих других "земных" задачах, где нужно было учитывать, что Земля — не плоский блин, покоящийся на трех китах.

Значительный вклад в сферическую геометрию внес Менелай из Александрии (ок. 100 н.э.). Его труд Сферика стал вершиной достижений греков в этой области. В Сферике рассматриваются сферические треугольники — предмет, которого нет у Евклида.
{*Менелай перенес на сферу евклидову теорию плоских треугольников и в числе прочего получил условие, при котором три точки на сторонах сферического треугольника или их продолжениях лежат на одной прямой. Соответствующая теорема для плоскости в то время была уже широко известна, однако в историю геометрии она вошла именно как теорема Менелая, причем, в отличие от Птолемея (ок. 150), у которого в работах немало вычислений, трактат Менелая геометричен строго в духе евклидовой традиции.*}

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Роль прямых линий на сфере играют так называемые большие окружности - сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр. Также их можно определить, как наикратчайшие из линий, соединяющих две точки сферы, как это делалось на плоскости и в пространстве. Прямые на сфере являются замкнутыми, то есть, если мы будем двигаться по такой прямой, рано или поздно попадём в начало пути. Точка не разделяет прямую на две части.

Под расстоянием между двумя точками на сфере понимается длина меньшей из двух дуг большой окружности, соединяющей эти точки. Это определение следует видоизменить лишь для случая диаметрально противоположных точек A и A1 сферы; для них существует бесконечно много соединяющих их дуг больших окружностей, и все они имеют одну и ту же длину πr (где r - радиус сферы), которую и принимаем за расстояние между A и A1.

Дуга, соединяющая две точки большоя окружности есть сферический отрезок. Длина сферического отрезка определяется через радианную меру центрального угла a и радиус сферы R и равна R a. Любая точка C сферического отрезка AB разбивает его на два, и сумма их сферических длин, как и в планиметрии, равна длине всего отрезка, т.е. PAOC + PCOB = PAOB. Для любой же точки D вне отрезка AB имеет место "сферическое неравенство треугольника": сумма сферических расстояний от D до A и от D до B больше AB, т.е. PAOD + PDOB > PAOB, - полное соответствие между сферической и плоской геометриями. Неравенство треугольника — одно из основополагающих в сферической геометрии, из него следует, что, как и в планиметрии, сферический отрезок короче любой сферической ломаной, а значит, и любой кривой на сфере, соединяющей его концы.

Роль окружностей на сфере играют, так называемые, малые окружности, т. е. сечения сферы плоскостями, не проходящими через ее центр. Также, сферическую окружность можно определить как множество точек сферы, равноудаленных от заданной точки P, как и в планиметрии. Но на сфере точек, удовлетворяющих этому условию будет две. Т.е. Сферических центров (их называют ещё полюсами) у окружности — два: P и P_1. Радиуса у сферической окружности также, два. Легко показать, что окружность лежит в плоскости, перпендикулярной диаметру сферы PP` , т. е. это обычная плоская окружность с центром на диаметре PP`.

Если обратиться к глобусу, то можно видеть, что идет речь именно о таких окружностях, как параллели, и сферическими центрами всех параллелей являются Северный и Южный полюса. Если диаметр r сферической окружности равен p/2, то сферическая окружность превращается в сферическую прямую. (На глобусе — экватор). В этом случае такую окружность называют полянрой каждой из точек P и P`.

Между геометрией на сфере и геометрией на плоскости имеется и одно существенное различие. Мы знаем, что через каждые две точки плоскости проходит единственная прямая линия; другими словами, никакие две прямые не могут пересечься в двух точках. В противоположность этому каждые две большие окружности сферы пересекаются в двух (диаметрально противоположных) точках. Более того, через две диаметрально противоположные точки проходит бесконечное количество сферических приямых. Таким образом, в сферической геометрии просто не существует <u>понятия параллельности</u>. Это обстоятельство резко отличает сферическую геометрию как от евклидовой геометрии, так и от неевклидовой геометрии Лобачевского.
{Для того чтобы устранить его, условимся называть "точкой" сразу пару диаметрально противоположных точек сферы. Полученный геометрический образ - сферу, понимаемую как множество пар диаметрально противоположных точек, - мы и назовем неевклидовой плоскостью Римана. Под "прямыми" неевклидовой геометрии Римана будем понимать большие окружности сферы (рассматриваемые как множество пар диаметрально противоположных точек). Условимся, далее, принимать за "расстояние" между двумя "точками" A и B плоскости Римана (не превосходящее четверти большой окружности) расстояние между соответствующими им точками сферы. При таком определении полная длина "прямой" будет равна πr, но не 2πr }

<u>Углы</u> между большими окружностями, как и углы между любыми другими линиями на сфере, принимаются равными углам между касательными к этим линиям в точках пересечения. При пересечении двух сферических прямых a и b на сфере образуются четыре сферических двуугольника, подобно тому, как две пересекающиеся прямые на плоскости разбивают ее на четыре плоских угла. Каждому из двуугольников соответствует двугранный угол, образованный диаметральными плоскостями, содержащими a и b. А угол между сферическими прямыми равен меньшему из углов образуемых ими двуугольников.

Уместно провести аналогию со стереометрией. Каждой точке сферы сопоставляется луч, проведенный из центра сферы в эту точку, а любой фигуре на сфере — объединение всех пересекающих ее лучей. Так, сферической прямой соответствует содержащая ее диаметральная плоскость, сферическому отрезку — плоский угол, двуугольнику — двугранный угол, сферической окружности — коническая поверхность, ось которой проходит через полюсы окружности.

<u>Площадь сферы</u> считается по формуле $S = 4\pi r^2$. Отсюда можно вывести площадь <u>сферического двуугольника</u> как $S = 2R^2\alpha$, где R — радиус сферы, а α — угол двуугольника (между касательными)
Если рассматривать двуугольник с углом a, то при a = 2p/n (n - целое число) сферу можно разрезать ровно на n копий такого двуугольника, а площадь сферы равна $4\pi R^2$ = 4p при R = 1, поэтому площадь двуугольника равна 4p/n = 2a.

<u>Сферический треугольник</u>. Три больших окружности, не пересекающихся в одной точке, образуют на сфере восемь сферических треугольников. Зная элементы (стороны и углы) одного из них, можно определить элементы все остальных, поэтому рассматривают соотношения между элементами одного из них, того, у которого все стороны меньше половины большой окружности. Стороны треугольника измеряются плоскими углами трехгранного угла OABC, углы треугольника — двугранными углами того же трехгранного угла.

<u>Сумма углов</u> всякого <u>сферического треугольника</u> всегда больше π, но меньше 3π, сумма всех сторон сферического треугольника всегда меньше 2π. Ещё один удивительный с точки зрения планиметрии факт — треугольник на сфере может иметь все три прямых угла.
Разность PA+PB +PC — p = d (измеряемая в радианах) — величина положительная и называется сферическим <u>избытком</u> данного сферического треугольника. Сферическим

дефектом называется величина e = 2пR − (a + b + c). Площадь сферического треугольника: $S = R^2d$, где R - радиус сферы, а d — сферический избыток. Эта формула впервые была опубликована голландцем А.Жираром в 1629 и названа его именем. Эта формула не имеет евклидова аналога.
{Полагаем R=1. Треугольник ABC является пересечением трех полусфер P, Q, R, граничные окружности которых содержат стороны BC, CA, AB соответственно. Площадь любой полусферы равна, как известно, 2p. Площадь пересечения двух полусфер - "поверхность арбузной дольки" - прямо пропорциональна углу между ограничивающими их окружностями. Если этот угол равен p, то пересечение само есть полусфера и его площадь - "поверхность половины арбуза" - равна 2p. Следовательно, коэффициент пропорциональности равен 2. Значит, пересечения Q с R, R с P, P с Q имеют площади 2a, 2b, 2g соответственно (где a, b, g - углы нашего треугольника).
Объединение полусфер P, Q, R есть вся сфера минус треугольник A 'B 'C ' - антипод треугольника ABC. Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда площадь треугольника A 'B 'C ' также равна S и, следовательно, площадь объединения полусфер P, Q, R равна 4p - S.
С другой стороны, площадь объединения может быть подсчитана как сумма площадей полусфер P, Q, R минус сумма площадей их попарных пересечений, которые были учтены дважды, плюс площадь треугольника ABC, которая в результате не была учтена вовсе (мы ее учли трижды, когда суммировали площади полусфер P, Q, R, но затем трижды вычли, когда вычитали площади попарных пересечений этих полусфер). В результате получаем:
$4p - S = 2p + 2p + 2p - 2a - 2b - 2g + S$,
откуда
$S = a + b + g - p$.}
Здесь ещё раз показано, что сумма углов сферического треугольника всегда больше p, причем избыток равен площади треугольника. Для очень маленького сферического треугольника сумма его углов почти равна p. Это соответствует тому, что такой треугольник почти евклидов.

Многие свойства сферического треугольника (а они одновременно являются и свойствами трехгранных углов) почти полностью повторяют свойства обычного треугольника. Среди них — неравенство треугольника, которое на языке трехгранных углов гласит, что любой плоский угол трёхгранного угла меньше суммы двух других. Или, например, три признака равенства треугольников. Все планиметрические следствия упомянутых теорем вместе с их доказательствами остаются справедливыми на сфере. Так, множество точек, равноудаленных от концов отрезка, будет и на сфере перпендикулярной к нему прямой, проходящей через его середину, откуда следует, что серединные перпендикуляры к сторонам сферического треугольника ABC имеют общую точку, точнее, две диаметрально противоположные общие точки P и P`, являющиеся полюсами его единственной описанной окружности. В стереометрии это означает, что около любого трёхгранного угла можно описать конус. Легко перенести на сферу и теорему о том, что биссектрисы треугольника пересекаются в центре его вписанной окружности.

{Теоремы о пересечении высот и медиан также остаются верными, но их обычные доказательства в планиметрии прямо или косвенно используют параллельность, которой, на сфере нет, и потому проще доказать их заново, на языке стереометрии. Плоскости, содержащие медианы сферического треугольника ABC, пересекают плоский треугольник с теми же вершинами по его обычным медианам, следовательно, все они содержат радиус сферы, проходящий через точку пересечения плоских медиан. Конец радиуса и будет общей точкой трех "сферических" медиан.}

Свойства сферических треугольников во многом отличаются от свойств треугольников на плоскости. Так, к известным трем случаям равенства прямолинейных треугольников добавляется еще и четвертый: два треугольника ABC и A`B`C` равны, если равны соответственно три угла PA = PA`, PB = PB`, PC = PC`. Таким образом, на сфере не существует подобных треугольников. *{более того, в сферической геометрии нет самого понятия подобия, т. к. не существует преобразований, изменяющих все расстояния в одинаковое (не равное 1) число раз. Эти особенности связаны с нарушением евклидовой аксиомы о параллельных прямых и также присущи геометрии Лобачевского. Треугольники, имеющие равные элементы и различную ориентацию, называются симметричными}*

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА НА СФЕРЕ

Выведем аналог теоремы Пифагора на сфере, т.е. выражение гипотенузы прямоугольного сферического треугольника через его катеты.
Возьмём треугольник ABC (C - вершина прямого угла) на сфере с центром в точке O.
Положим |BC|=a, |CA|=b, |AB|=c (длины соответствующих дуг больших кругов сферы)
Проведем теперь некоторые построения в евклидовом пространстве, в котором находится наша сфера. Опустим из точки A перпендикуляр AK на радиус OC. Поскольку плоскости AOC и BOC перпендикулярны, отрезок AK будет перпендикулярен плоскости BOC (изображенной на рис. 1 как "экваториальная" плоскость). Опустим из точки K перпендикуляр KL на радиус OB. По теореме о трех перпендикулярах отрезок AL будет также перпендикулярен радиусу OB. Имеем
a = - BOC, b = - COA, c = - AOB.
Из прямоугольных треугольников AOK, AOL и KOL находим:
OK = cos b, OL = cos c = OK cos a,
откуда
cos c = cos a cos b.
Это и есть теорема Пифагора в сферической геометрии.
{*При R стремящемся в бесконечность сфера становится все более и более плоской и ее геометрия стремится к евклидовой. Считая a и b постоянными, получаем*
$c^2 = a^2 + b^2 + o(1)$.
В пределе получаем, как и следовало ожидать, обычную теорему Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.}

КООРДИНАТЫ НА СФЕРЕ. Каждая точка на сфере вполне определяется заданием двух чисел; эти числа (координаты) определяются следующим образом. Фиксируется некоторый большой круг QQ` (экватор), одна из двух точек пересечения диаметра сферы PP`, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью сферы, например P (полюс), и один из больших полукругов PAP`, выходящих из полюса (первый меридиан). Большие полукруги, выходящие из P, называются меридианами, малые круги, параллельные экватору, такие, как LL`, — параллелями. В качестве одной из координат точки M на сфере принимается угол q = POM (высота точки), в качестве второй — угол j = AON между первым меридианом и меридианом, проходящим через точку M (долгота точки, отсчитываемая против часовой стрелки).

В географии (на глобусе) в качестве первого меридиана принято использовать Гринвичский меридиан, проходящий через главный зал Гринвичской обсерватории (Гринвич — городской округ Лондона), он разделяет Землю на Восточное и Западное полушария, соответственно и долгота бывает восточной либо западной и измеряется от 0 до 180° в обе стороны от Гринвича. А вместо высоты точки в географии принято использовать широту, т. е. угол NOM = 90° — q, отсчитываемый от экватора. Т.к. экватор делит Землю на Северное и Южное полушария, то и широта бывает северной либо южной и изменяется от 0 до 90°.

РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКОСТИ НА РАВНЫЕ ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

Клетчатая бумага и соты представляют собой разбиения евклидовой плоскости на равные правильные многоугольники (в первом случае на квадраты, во втором - на шестиугольники).

Так как сумма углов евклидова n-угольника равна (n - 2)p, то каждый угол правильного n-угольника равен (1 - 2/n)p. Если в разбиении плоскости на равные правильные n-угольники в каждой вершине сходится q многоугольников, то должно быть
q(1-2/n)p = p
откуда
(n-2)/n = 1/q или q = n/(n-2)
Это уравнение имеет три решения:
(p, q) = (3, 6); (4, 4); (6, 3).
Последним двум решениям соответствуют уже упомянутые разбиения на квадраты и на правильные шестиугольники. Первому решению соответствует разбиение на правильные треугольники.

Формула для суммы углов p-угольника в евклидовой геометрии выводится из формулы для суммы углов треугольника путем разбиения n-угольника на n - 2 треугольника диагоналями, проведенными из какой-либо его вершины. Таким же способом доказывается, что сумма углов сферического n-угольника равна (n - 2)p плюс площадь этого n-угольника.

Отсюда следует, что угол правильного сферического p-угольника больше, чем (1 - 2/n)p, причем в отличие от евклидова случая он зависит от радиуса многоугольника. Если радиус мал, то многоугольник близок к евклидову и его угол лишь ненамного больше (1 - 2/n)p. Когда радиус приближается к максимально возможному значению, то сам многоугольник приближается к полусфере, а его угол приближается к p. Таким образом, угол правильного сферического p-угольника может быть любым числом, лежащим между (1 - 2/n)p и p.

Поэтому при разбиении сферы на равные правильные n-угольники, сходящиеся по q в каждой вершине, неравенство имеет следующие решения:

(p, q)=(3, 3); (3, 4); (3, 5); (4, 3); (5, 3).

Таким образом, имеется ровно пять разбиений сферы на равные правильные многоугольники.

СПИСОК ЗАДАЧ.

1. Сфера радиуса 2 пересечена плоскостью, удалённой от центра на расстояние 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности сферы между двумя наиболее удалёнными точками сечения.

4.41. На сфере даны две пересекающиеся окружности S_1 и S_2. Рассмотрим конус (или цилиндр), касающийся данной сферы по окружности S_1. Докажите, что окружности S_1 и S_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда плоскость окружности S_2 проходит через вершину этого конуса (или параллельна оси цилиндра).

3. Итак, Чукча выходит каждый день на охоту по следующему маршруту: 10 км на юг, 10 км на восток, 10 км на север (На запад чукча не ходит) И хоп! Оказывается перед своим чумом. "Однако!" говорит чукча. Теперь вопрос: найти Геометрическое Место Точек, где может находиться чум чукчи.

4.42. Найдите площадь криволинейного треугольника, образованного при пересечении сферы радиуса R с трехгранным углом, двугранные углы которого равны α, β и γ, а вершина совпадает с центром сферы.

5. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан — это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).
6. На сферическом Солнце обнаружено конечное число круглых пятен, каждое из которых занимает меньше половины поверхности Солнца. Эти пятна предполагаются замкнутыми (т.е. граница пятна принадлежит ему) и не пересекаются между собой. Доказать, что на Солнце найдутся две диаметрально противоположные точки, не покрытые пятнами.
7. На сфере, радиус которой равен 2, расположены три окружности радиуса 1, каждая из которых касается двух других. Найдите радиус окружности меньшей, чем данная, которая также расположена на данной сфере и касается каждой из данных окружностей.

4.43. Пусть A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC сферического треугольника ABC. Докажите, что площадь сферического треугольника A_1B_1C меньше половины площади сферического треугольника ABC.

4.45. На сфере фиксированы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C сферических треугольников ABC, в которых величина $\angle A + \angle B - \angle C$ постоянна.

4.46. На сфере фиксированы две точки A и B. Найдите геометрическое место третьих вершин C сферических треугольников ABC данной площади.